

PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA TẤM NANO COMPOSITE

ANALYSIS OF FREE VIBRATION OF A NANOCOMPOSITE PLATE

Đào Văn Vương^{1,*}, Phan Quang Phúc², Phạm Huy Hiếu³,
Đỗ Văn Thơm¹, Phạm Văn Đông²

DOI: <https://doi.org/10.57001/huih5804.2026.164>

TÓM TẮT

Để khai thác tối đa ưu điểm của nhiều loại vật liệu khác nhau, người ta thường sử dụng các kết cấu được chế tạo từ nhiều lớp vật liệu khác nhau, do vậy hiệu quả làm việc của các kết cấu này được tăng lên. Bài báo này sử dụng lời giải mô phỏng hữu hạn để nghiên cứu đáp ứng dao động tự do của tấm nano composite nhiều lớp tựa một phần trên nền đàn hồi có độ cứng biến đổi, trong đó tấm composite gồm hai lớp vật liệu ngăn cách với nhau bởi biên dạng là bề mặt liên tục (dạng sóng hình sin) và bề mặt dạng gấp khúc (dạng sóng hình vuông). Các công thức tính toán được thiết lập dựa trên hai lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới, trong đó lý thuyết phi cục bộ cũng được tính đến để xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước. Ngoài ra, bài báo cũng kể đến ảnh hưởng của sự không hoàn hảo hình dáng ban đầu từ dạng toàn cục đến dạng cục bộ, cũng chính điều này làm phức tạp các công thức tính toán, nhưng kết quả tính toán tiến gần với thực tế làm việc của các kết cấu này. Nghiên cứu này tạo tiền đề khoa học có giá trị để lựa chọn các tham số thích hợp khi thiết kế các tấm composite trong thực tế.

Từ khóa: Dao động riêng, tấm nano, phương pháp phần tử hữu hạn, lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới.

ABSTRACT

To fully exploit the advantages of various materials, structures composed of multiple material layers are often employed, thereby enhancing their overall performance. This paper employs a finite simulation approach to investigate the free vibration response of multilayer nano-composite plates that are partially resting on an elastic foundation with spatially varying stiffness. The composite plate consists of two material layers separated by an interface with either a continuous sinusoidal surface or a corrugated square-wave surface. The governing formulations are established based on two newly developed shear deformation theories, in which the nonlocal theory is also incorporated to account for size-dependent effects. Furthermore, the influence of initial geometric imperfections, ranging from global to local forms, is considered. Although this significantly complicates the mathematical formulation, it enables the obtained results to better reflect the actual mechanical behavior of such structures. This study provides a valuable scientific foundation for selecting appropriate parameters in the design of composite plates for practical engineering applications.

Keywords: Natural frequency, nano sheet, finite element method, new shear deformation theory.

¹Học viện Kỹ thuật Quân sự

²Đại học Công nghiệp Hà Nội

³Viện Kỹ thuật Phòng không - Không quân

*Email: vuong.mta@gmail.com

Ngày nhận bài: 15/3/2026

Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 15/5/2026

Ngày chấp nhận đăng: 29/6/2026

1. GIỚI THIỆU

Ngày nay, cùng với sự phát triển của khoa học kỹ thuật, các vật liệu mới cùng với các kết cấu tiên tiến đã và đang được các nhà khoa học quan tâm nghiên cứu, điều này xuất phát từ triển vọng ứng dụng rộng rãi trong thực tế của nó, đặc biệt là các kết cấu nhẹ nhưng khả năng chịu

tải tốt. Do vậy yêu cầu thực tế đặt ra là phải có nghiên cứu trên nhiều khía cạnh khác nhau về các kết cấu này, và khía cạnh đáp ứng cơ học cũng là một phạm vi được các nhà cơ học quan tâm. Li và đồng nghiệp [1] sử dụng nhiều lời giải khác nhau để nghiên cứu dao động riêng của tấm composite với nhiều hình dạng phức tạp và có chiều dày

thay đổi. Phương pháp không lưới kết hợp với lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới đã được Hung và cộng sự [2] sử dụng để phân tích dao động riêng của tấm composite.

Một số thiết bị đặc thù như sensor cảm ứng, các vi mạch điện tử cần sử dụng các kết cấu dầm, tấm có kích thước cỡ nano và micro mét, khi ở các kích thước nhỏ này, khi phân tích các đáp ứng cơ học của chúng người ta cần phải xem xét ảnh hưởng hiệu ứng kích thước. Bình và các đồng nghiệp [3] đã áp dụng lời giải dạng giải tích để phân tích ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước, môi trường nhiệt ẩm và hiệu ứng flexoelectric đến đáp ứng động lực học của dầm nano chịu tải trọng ngẫu nhiên. Ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric và vết nứt đến tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của tấm nano đã được Doan và đồng nghiệp chỉ ra trong công trình [4], trong đó các công thức tính toán được thiết lập dựa trên lý thuyết trường pha và phương pháp phần tử hữu hạn. Cách tiếp cận dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn cũng được Tho và đồng nghiệp [5] áp dụng để chỉ rõ ảnh hưởng của hiệu ứng flexomagnetic đến dao động cưỡng bức của tấm nano, trong đó các công thức tính toán được thiết lập dựa trên lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới. Trên cơ sở của nhiều loại của lý thuyết biến dạng cắt cải tiến, Tien và đồng nghiệp [6] đã xây dựng quan hệ ứng xử cơ học, thiết lập phương trình cân bằng cho tấm nano gồm năm lớp vật liệu, sau đó các tác giả đã sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để giải hệ phương trình tìm được nhằm làm rõ đáp ứng dao động và uốn của kết cấu này. Để hiểu hơn về đáp ứng cơ học của các kết cấu kích thước nano, người đọc có thể nghiên cứu các công trình [7-10].

Trên cơ sở các nghiên cứu đã có, có thể nhận ra rằng nghiên cứu để làm rõ đáp ứng dao động của tấm nano composite nhiều lớp, trong đó các lớp ngăn cách bởi biên dạng trơn hoặc gấp khúc là chưa được chỉ ra. Vì lý do đó, bài báo sử dụng phương pháp mô phỏng hữu hạn để làm sáng tỏ vấn đề này, đây là vấn đề thực sự có ý nghĩa khoa học.

2. ĐẶT BÀI TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Tấm nano composite gồm hai lớp tiếp xúc với nhau theo biên dạng lượn sóng được mô hình như trên hình 1. Tấm có các thông số hình học là a và b , chiều dày là h , hai lớp vật liệu có chiều dày tương ứng là h_i ($i = 1-2$), bài báo này tính toán hai trường hợp sau:

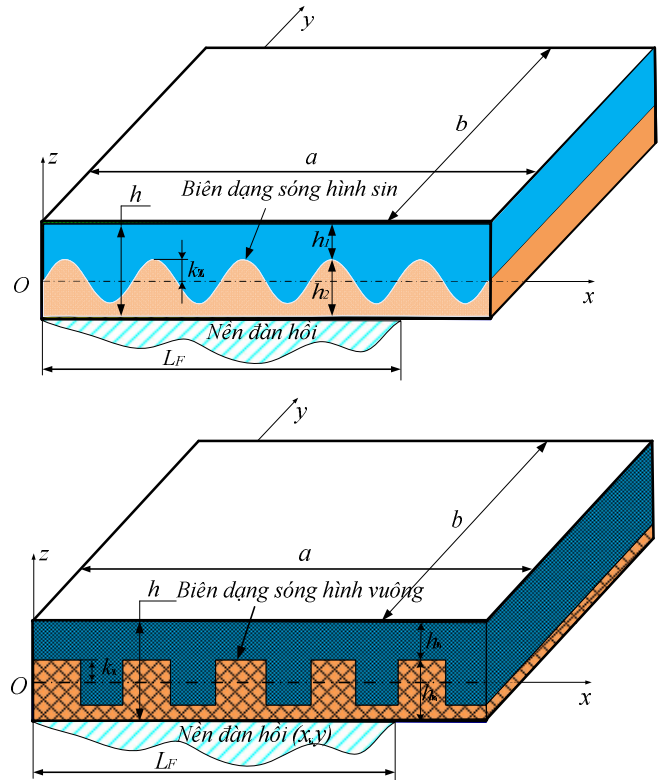
Biên dạng tiếp xúc của hai lớp có dạng sóng hình sin:

$$h_x = k_0 \sin(\beta_b x) \quad (1)$$

Biên dạng tiếp xúc của hai lớp có dạng sóng hình vuông:

$$h_x = \begin{cases} k_0 & : \sin(\beta_b x) \geq 0 \\ -k_0 & : \sin(\beta_b x) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

với $\beta_b = \frac{2\pi N}{a}$ và N là số bước sóng, k_0 là biên độ sóng của biên dạng tiếp xúc.



Hình 1. Mô hình tấm nano composite tựa một phần trên nền đàn hồi
Lỗ rỗng xuất hiện trong vật liệu từng lớp với tỷ lệ thể tích:

$$Y_r^{(i)} = Y_{or} \left\{ 1 - r_0 + \frac{\pi r_0}{2} \cos(\pi z / h_i) \right\} \quad (3)$$

trong đó, $Y_r^{(i)}$ là tỷ lệ thể tích lỗ rỗng trong trường hợp $r_0 = 0$.

Cơ tính vật liệu có biểu thức:

$$E^{(i)}(z) = E_0^{(i)} (1 - Y_m^{(i)}) \quad (4)$$

trong đó, $E_0^{(i)}$ là mô đun đàn hồi, hệ số Poát xòng trong mỗi lớp giả thiết không đổi $\nu^{(1)} = \nu^{(2)}$.

Do sự khác nhau về vật liệu của hai lớp, do đó khoảng cách giữa mặt trung hòa và mặt trung bình có dạng:

$$h_b = \frac{\int_{-h_2}^{h_x} E^{(2)}(z) dz + \int_{h_x}^{h_1} E^{(1)}(z) dz}{\int_{-h_2}^{h_x} E^{(2)}(z) dz + \int_{h_x}^{h_1} E^{(1)}(z) dz} \quad (5)$$

Trường chuyển vị của tấm

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = -(z - h_b) \frac{\partial u_{3b}}{\partial x} - e_z \frac{\partial u_{3s}}{\partial x} \\ u_y(x, y, z) = -(z - h_b) \frac{\partial u_{3b}}{\partial y} - e_z \frac{\partial u_{3s}}{\partial y} \\ u_z(x, y, z) = u_{3b} + u_{3s} + u_{3imp} \end{cases} \quad (6)$$

trong đó chuyển vị theo phương z được chia làm hai thành phần và e_z :

$$e_z(z) = (z - h_b) - \frac{(z - h_b)}{1 + \frac{16}{7h^2} \left(\frac{(z - h_b)^4}{h^2} + (z - h_b)^2 \right)} \quad (7)$$

Trường biến dạng:

$$\begin{cases} \epsilon_x = (z - h_b) \epsilon_{zx} + e_z \epsilon_{rx} + \epsilon_{ximp} \\ \epsilon_y = (z - h_b) \epsilon_{zy} + e_z \epsilon_{ry} + \epsilon_{yimp} \\ \epsilon_{xy} = (z - h_b) \epsilon_{zxy} + e_z \epsilon_{rxy} + \epsilon_{xyimp} \\ \gamma_{xz} = n_z \gamma_{sxz} \\ \gamma_{yz} = n_z \gamma_{syx} \end{cases} \quad (8)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \epsilon_{zx} &= -\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x^2}; \epsilon_{rx} = -\frac{\partial^2 u_{3s}}{\partial x^2}; \\ \epsilon_{ximp} &= \frac{\partial w_{3imp}}{\partial x} \frac{\partial (u_{3b} + u_{3s})}{\partial x} \\ \epsilon_{zy} &= -\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial y^2}; \epsilon_{ry} = -\frac{\partial^2 u_{3s}}{\partial y^2}; \\ \epsilon_{yimp} &= \frac{\partial u_{3imp}}{\partial y} \frac{\partial (u_{3b} + u_{3s})}{\partial y} \\ \epsilon_{zxy} &= -2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x \partial y}; \epsilon_{rxy} = -2 \frac{\partial^2 u_{3s}}{\partial x \partial y}; \\ \epsilon_{xyimp} &= \frac{\partial u_{3imp}}{\partial y} \frac{\partial (u_{3b} + w_{3s})}{\partial x} + \frac{\partial u_{3imp}}{\partial x} \frac{\partial (u_{3b} + u_{3s})}{\partial y} \\ \gamma_{sxz} &= \frac{\partial u_{3s}}{\partial x}; \gamma_{syx} = \frac{\partial u_{3s}}{\partial y}; n_z = 1 - \frac{\partial e_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (9)$$

với ϵ_{ximp} , ϵ_{yimp} , ϵ_{xyimp} là các thành phần biến dạng do ảnh hưởng của sự không hoàn hảo hình dáng ban đầu:

$$\begin{aligned} u_{3im} &= R_{im} h \operatorname{sech} \left[\delta_1 \left(\frac{x}{a} - \psi_1 \right) \right] \cos \left[\mu_1 \left(\frac{x}{a} - \psi_1 \right) \right] \\ &\times \operatorname{sech} \left[\delta_2 \left(\frac{y}{b} - \psi_2 \right) \right] \cos \left[\mu_2 \left(\frac{y}{b} - \psi_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

với R_{im} là biên độ của sự không hoàn hảo, các tham số $\delta_1, \psi_1, \mu_1, \delta_2, \psi_2$, và μ_2 thể hiện mức độ không hoàn hảo của

hình dáng ban đầu. Các thông số: $\delta_1, \mu_1, \psi_1, \delta_2, \mu_2, \psi_2$ nhận các giá trị khác nhau tương ứng với các dạng không hoàn hảo ĐH (dạng hàm điều hòa), TC1 (dạng toàn cục 1), TC2 (dạng toàn cục 2), TC3 (dạng toàn cục 3), CB1 (dạng cục bộ 1), CB2 (dạng cục bộ 2), CB3 (dạng cục bộ 3), CB4 (dạng cục bộ 4), và CB5 (dạng cục bộ 5) được cho như trong tài liệu [11].

Do tấm composite có kích thước nano, nên hiệu ứng kích thước cần được tính đến, và để thể hiện điều này, bài báo sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ:

$$\begin{aligned} (1 - \psi_L^2 \nabla^2) \sigma_x^{(i)} &= \mathbf{D}^{(i)} \begin{pmatrix} (z - z_b) \epsilon_z^{(i)} \\ + e_z \epsilon_r^{(i)} + \epsilon_{imp}^{(i)} \end{pmatrix} \\ (1 - \psi_L^2 \nabla^2) \tau^{(i)} &= \mathbf{D}_s^{(i)} \mathbf{Y}_s^{(i)} \end{aligned} \quad (11)$$

trong đó $\sigma_x^{(i)}$ là véc tơ ứng suất, $\tau^{(i)}$ là véc tơ ứng suất tiếp, ∇^2 là toán tử Laplace, ψ_L là tham số đặc trưng cho ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước, còn gọi là tham số đàn hồi phi cục bộ, $\mathbf{D}_s^{(i)} = \frac{E^{(i)}}{2(1 + \nu^{(i)})} \begin{bmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{bmatrix}$ là mô đun

đàn hồi trượt, $\nu^{(i)}$ là hệ số Poisson và $E^{(i)}$ là mô đun đàn hồi trượt của lớp vật liệu thứ i .

Nguyên lý công khả dĩ được áp dụng để thiết lập phương trình cân bằng cho tấm:

$$\delta \mathcal{U}_{tam} - \delta \mathcal{U}_{quatinh} = 0 \quad (12)$$

với $\delta \mathcal{U}_{tam}$ và $\delta \mathcal{U}_{quatinh}$ là công khả dĩ của tấm do biến dạng và công khả dĩ của lực quán tính, chúng có biểu thức:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U}_{plate} &= \int_{\Omega} \int_{-h_2}^{h_2} \left\{ \begin{aligned} &\sigma_x^{(2)} \delta(\zeta_x^{(2)}) + \sigma_y^{(2)} \delta(\zeta_y^{(2)}) \\ &+ \sigma_{xy}^{(2)} \delta(\zeta_{xy}^{(2)}) + \tau_{xz}^{(2)} \delta(\zeta_{xz}^{(2)}) \\ &+ \tau_{yz}^{(2)} \delta(\zeta_{yz}^{(2)}) \end{aligned} \right\} dz dx dy \\ &+ \int_{\Omega} \int_{h_x}^{h_1} \left\{ \begin{aligned} &\sigma_x^{(1)} \delta(\zeta_x^{(1)}) + \sigma_y^{(1)} \delta(\zeta_y^{(1)}) \\ &+ \sigma_{xy}^{(1)} \delta(\zeta_{xy}^{(1)}) \\ &+ \tau_{xz}^{(1)} \delta(\zeta_{xz}^{(1)}) + \tau_{yz}^{(1)} \delta(\zeta_{yz}^{(1)}) \end{aligned} \right\} dz dx dy \\ &+ \int_0^b \int_0^{L_x} \left\{ \begin{aligned} &H_w \left(1 - c_w \sin \left(\frac{x}{a} \right) \right) \\ &\times \left(1 - c_w \sin \left(\frac{y}{b} \right) \right) u_z \delta(u_z) \end{aligned} \right\} dx dy \end{aligned} \quad (13)$$

$$= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} -M_x \frac{\partial^2 \delta u_{3b}}{\partial x^2} - S_x \frac{\partial^2 \delta u_{3s}}{\partial x^2} \\ -M_y \frac{\partial^2 \delta u_{3b}}{\partial y^2} - S_y \frac{\partial^2 \delta u_{3s}}{\partial y^2} \\ -2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta u_{3b}}{\partial x \partial y} - 2S_{xy} \frac{\partial^2 \delta u_{3s}}{\partial x \partial y} \\ +Q_{xz} \frac{\partial \delta u_{3s}}{\partial x} + Q_{yz} \frac{\partial \delta u_{3s}}{\partial y} \end{pmatrix} dx dy \\ + \int_0^b \int_0^{L_F} \left\{ H_w \left(1 - c_w \sin \left(\frac{x}{a} \right) \right) \right. \\ \left. \times \left(1 - c_w \sin \left(\frac{y}{b} \right) \right) u_z \delta(u_z) \right\} dx dy$$

với M_x, M_y, M_{xy} là các thành phần mô men; S_x, S_y là các thành phần mô men bậc cao; Q_{xz}, Q_{yz} là các thành phần lực cắt; H_w và c_w là hai thông số của nền, L_F là độ dài của nền có tương tác với tấm composite.

Công khả dĩ của lực quán tính:

$$\delta \mathcal{V}_{quatinh} = \int_{\Omega} \int_{h_2}^{h_1} \rho^{(2)}(z) \left(\ddot{u}_x \delta u_x + \ddot{u}_y \delta u_y + \ddot{u}_z \delta u_z \right) dz dx dy \\ + \int_{\Omega} \int_{h_x}^{h_1} \rho^{(1)}(z) \left(\ddot{u}_x \delta u_x + \ddot{u}_y \delta u_y + \ddot{u}_z \delta u_z \right) dz dx dy \\ = \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} &R_0 (\ddot{u}_{3b} + \ddot{u}_{3s}) \delta(u_{3b} + u_{3s}) \\ &+ R_1 (\ddot{u}_{3b,xx} + \ddot{u}_{3b,yy}) \delta u_{3b} \\ &+ R_2 (\ddot{u}_{3s,xx} + \ddot{u}_{3s,yy}) \delta u_{3b} \\ &+ R_2 (\ddot{u}_{3b,xx} + \ddot{u}_{3b,yy}) \delta u_{3s} \\ &+ R_3 (\ddot{u}_{3s,xx} + \ddot{u}_{3s,yy}) \delta u_{3s} \end{aligned} \right\} dx dy \quad (14)$$

trong đó

$$\begin{Bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \int_{-h_2}^{h_1} \rho^{(2)}(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ (z - z_b)^2 \\ (z - z_b) e_z \\ e_z^2 \end{Bmatrix} dz \\ + \int_{h_x}^{h_1} \rho^{(1)}(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ (z - z_b)^2 \\ (z - z_b) e_z \\ e_z^2 \end{Bmatrix} dz \quad (15)$$

Sau các phép biến đổi, ta thu được phương trình cân bằng cho tấm nano composite có kể đến hiệu ứng kích thước như sau:

$$\int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \\ &+ (1 - \psi_L^2 \nabla^2) \left[\begin{aligned} &R_0 (\ddot{u}_{3b} + \ddot{u}_{3s}) \\ &+ R_1 (\ddot{u}_{3b,xx} + \ddot{u}_{3b,yy}) \\ &+ R_2 (\ddot{u}_{3s,xx} + \ddot{u}_{3s,yy}) \end{aligned} \right] \\ &+ \int_0^{L_F} \int_0^b (1 - \psi_L^2 \nabla^2) \left\{ \begin{aligned} &H_w \left(1 - c_w \sin \left(\frac{x}{a} \right) \right) \\ &\times \left(1 - c_w \sin \left(\frac{y}{b} \right) \right) u_z \end{aligned} \right\} dx dy \end{aligned} \right\} dx dy = 0 \quad (16)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \\ &+ (1 - \psi_L^2 \nabla^2) \left[\begin{aligned} &R_0 (\ddot{u}_{3b} + \ddot{u}_{3s}) \\ &+ R_2 (\ddot{u}_{3b,xx} + \ddot{u}_{3b,yy}) \\ &+ R_3 (\ddot{u}_{3s,xx} + \ddot{u}_{3s,yy}) \end{aligned} \right] \\ &+ \int_0^{L_F} \int_0^b (1 - \psi_L^2 \nabla^2) \left\{ \begin{aligned} &H_w \left(1 - c_w \sin \left(\frac{x}{a} \right) \right) \\ &\times \left(1 - c_w \sin \left(\frac{y}{b} \right) \right) u_z \end{aligned} \right\} dx dy \end{aligned} \right\} dx dy = 0$$

Có nhiều loại phần tử có thể sử dụng, ở đây bài báo sử dụng phần tử chữ nhật có 4 nút và mỗi nút gồm 6 bậc tự do như sau:

$$\mathbf{u}_{3e} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \begin{aligned} &u_{3bi}, u_{3si}, \left(\frac{\partial u_{3b}}{\partial x} \right)_i, \left(\frac{\partial u_{3s}}{\partial x} \right)_i \\ &, \left(\frac{\partial u_{3b}}{\partial y} \right)_i, \left(\frac{\partial u_{3s}}{\partial y} \right)_i \end{aligned} \right\}^T \quad (17)$$

Do vậy:

$$\mathbf{u}_{3b} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \begin{aligned} &T_i u_{3bi} + T_{i+1} \left(\frac{\partial u_{3b}}{\partial x} \right)_i \\ &+ T_{i+2} \left(\frac{\partial u_{3b}}{\partial y} \right)_i \end{aligned} \right\} = \mathbf{Y}_b \mathbf{u}_{3e} \quad (18)$$

$$\mathbf{u}_{3s} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \begin{aligned} &T_i u_{3si} + T_{i+1} \left(\frac{\partial u_{3s}}{\partial x} \right)_i \\ &+ T_{i+2} \left(\frac{\partial u_{3s}}{\partial y} \right)_i \end{aligned} \right\} = \mathbf{Y}_s \mathbf{u}_{3e}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{3b}}{\partial x} &= \sum_{i=1}^4 \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial x} u_{3bi} + \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} \left(\frac{\partial u_{3b}}{\partial x} \right)_i \right\} = \mathbf{Y}_{bx} \mathbf{u}_{3e} \\ \frac{\partial u_{3b}}{\partial y} &= \sum_{i=1}^4 \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial y} u_{3bi} + \frac{\partial T_{i+1}}{\partial y} \left(\frac{\partial u_{3b}}{\partial y} \right)_i \right\} = \mathbf{Y}_{by} \mathbf{u}_{3e} \\ \frac{\partial u_{3s}}{\partial x} &= \sum_{i=1}^4 \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial x} u_{3si} + \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} \left(\frac{\partial u_{3s}}{\partial x} \right)_i \right\} = \mathbf{Y}_{sx} \mathbf{u}_{3e} \\ \frac{\partial u_{3s}}{\partial y} &= \sum_{i=1}^4 \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial y} u_{3si} + \frac{\partial T_{i+1}}{\partial y} \left(\frac{\partial u_{3s}}{\partial y} \right)_i \right\} = \mathbf{Y}_{sy} \mathbf{u}_{3e} \\ \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x^2} &= \sum_{i=1}^4 \left\{ \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} u_{3bi} + \frac{\partial^2 T_{i+1}}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_{3b}}{\partial x} \right)_i \right\} = \mathbf{Y}_{b2x} \mathbf{u}_{3e} \\ \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial y^2} &= \sum_{i=1}^4 \left\{ \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} u_{3bi} + \frac{\partial^2 T_{i+1}}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u_{3b}}{\partial y} \right)_i \right\} = \mathbf{Y}_{b2y} \mathbf{u}_{3e} \\ \frac{\partial^2 u_{3s}}{\partial x^2} &= \sum_{i=1}^4 \left\{ \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} u_{3si} + \frac{\partial^2 T_{i+1}}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_{3s}}{\partial x} \right)_i \right\} = \mathbf{Y}_{s2x} \mathbf{u}_{3e} \\ \frac{\partial^2 u_{3s}}{\partial y^2} &= \sum_{i=1}^4 \left\{ \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} u_{3si} + \frac{\partial^2 T_{i+1}}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u_{3s}}{\partial y} \right)_i \right\} = \mathbf{Y}_{s2y} \mathbf{u}_{3e} \\ \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x \partial y} &= \sum_{i=1}^4 \left\{ \frac{\partial^2 T_i}{\partial x \partial y} u_{3bi} + \frac{\partial^2 T_{i+1}}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_{3b}}{\partial x} \right)_i \right\} = \mathbf{Y}_{b2xy} \mathbf{u}_{3e} \\ \frac{\partial^2 u_{3s}}{\partial x \partial y} &= \sum_{i=1}^4 \left\{ \frac{\partial^2 T_i}{\partial x \partial y} u_{3si} + \frac{\partial^2 T_{i+1}}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_{3s}}{\partial x} \right)_i \right\} = \mathbf{Y}_{s2xy} \mathbf{u}_{3e}\end{aligned}$$

trong đó, T_i là hàm dạng Hermit.

Véc tơ chuyển vị tại một điểm bất kỳ thuộc phần tử:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= \left\{ u_{3b}, u_{3s}, \left(\frac{\partial u_{3b}}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial u_{3s}}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial u_{3b}}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial u_{3s}}{\partial y} \right) \right\}^T \\ &= \{ \mathbf{Y}_b, \mathbf{Y}_s, \mathbf{Y}_{bx}, \mathbf{Y}_{sx}, \mathbf{Y}_{by}, \mathbf{Y}_{sy} \} \mathbf{u}_{3e} = \mathbf{Y} \mathbf{u}_{3e}\end{aligned}\quad (19)$$

Do vậy, các véc tơ biến dạng được viết lại như sau:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}_z &= \begin{bmatrix} -\mathbf{Y}_{b2x} & -\mathbf{Y}_{b2y} & -2\mathbf{Y}_{b2xy} \end{bmatrix}^T \mathbf{u}_{3e} = \mathbf{Y}_z \mathbf{u}_{3e}; \\ \boldsymbol{\epsilon}_f &= \begin{bmatrix} -\mathbf{Y}_{s2x} & -\mathbf{Y}_{s2y} & -2\mathbf{Y}_{s2xy} \end{bmatrix}^T \mathbf{u}_{3e} = \mathbf{Y}_f \mathbf{u}_{3e};\end{aligned}\quad (20)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}_{imp} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{ximp} & \mathbf{Y}_{yimp} & \mathbf{Y}_{xyimp} \end{bmatrix}^T \mathbf{u}_{3e} = \mathbf{Y}_{imp} \mathbf{u}_{3e}; \\ \mathbf{Y}_{s0} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{sx} & \mathbf{Y}_{sy} \end{bmatrix}^T \mathbf{u}_e = \mathbf{Y}_s \mathbf{u}_{3e}\end{aligned}\quad (21)$$

trong đó:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_z &= \begin{bmatrix} -\mathbf{Y}_{b2x} & -\mathbf{Y}_{b2y} & -2\mathbf{Y}_{b2xy} \end{bmatrix}^T; \\ \mathbf{Y}_f &= \begin{bmatrix} -\mathbf{Y}_{s2x} & -\mathbf{Y}_{s2y} & -2\mathbf{Y}_{s2xy} \end{bmatrix}^T; \\ \mathbf{Y}_{imp} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{ximp} & \mathbf{Y}_{yimp} & \mathbf{Y}_{xyimp} \end{bmatrix}^T; \\ \mathbf{Y}_s &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{sx} & \mathbf{Y}_{sy} \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (22)$$

Các biểu thức (17)-(22) được thay vào phương trình cân bằng (16), phương trình dao động của tấm nano:

$$\left\{ \sum_e (\mathbf{K}_{tam}^e + \mathbf{K}_{nen}^e) - \omega^2 \sum_e \mathbf{M}^e \right\} \sum_e \mathbf{u}_{3e} = 0 \quad (23)$$

trong đó các ma trận của phần tử tấm được cho như sau:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{tam}^e &= \int_{\Omega_e} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_z^T \mathbf{C}_z \mathbf{Y}_z + \mathbf{Y}_z^T \mathbf{C}_f \mathbf{Y}_f + \mathbf{Y}_f^T \mathbf{C}_z \mathbf{Y}_z + \mathbf{Y}_f^T \mathbf{C}_f \mathbf{Y}_f \\ \mathbf{Y}_z^T \mathbf{C}_{zimp} \mathbf{Y}_{imp} + \mathbf{Y}_{imp}^T \mathbf{C}_{zimp} \mathbf{Y}_z + \mathbf{Y}_f^T \mathbf{C}_{fimp} \mathbf{Y}_{imp} \\ + \mathbf{Y}_{imp}^T \mathbf{C}_{fimp} \mathbf{Y}_f + \mathbf{Y}_{imp}^T \mathbf{C}_{imp} \mathbf{Y}_{imp} + \mathbf{Y}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{Y}_s \end{bmatrix} \right\} d\Omega \\ \mathbf{K}_{nen}^e &= \int_{\Omega_e} \left\{ \begin{bmatrix} \left((1 - \psi_L^2 \nabla^2) H_w \left(1 - c_w \sin \left(\frac{x}{a} \right) \right) \right) \\ \left(1 - c_w \sin \left(\frac{y}{b} \right) \right) \\ (\mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_s)^T (\mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_s) \end{bmatrix} \right\} d\Omega \quad (24) \\ \mathbf{M}^e &= \int_{\Omega_e - h_2}^{h_1} \left(1 - \psi_L^2 \nabla^2 \right) \rho^{(2)}(z) (\mathbf{R}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \mathbf{R}) dz d\Omega \\ &+ \int_{\Omega_{hx}}^{h_1} \left(1 - \psi_L^2 \nabla^2 \right) \rho^{(1)}(z) (\mathbf{R}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \mathbf{R}) dz d\Omega\end{aligned}$$

trong đó

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(z-h_b) & 0 & -e_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(z-h_b) & 0 & -e_z \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_z &= \left\{ \int_{-h_2}^{h_x} \mathbf{D}^{(2)} (z-h_b)^2 dz + \int_{h_x}^{h_1} \mathbf{D}^{(1)} (z-h_b)^2 dz \right\}; \\ \mathbf{C}_r &= \left\{ \int_{-h_2}^{h_x} \mathbf{D}^{(2)} e_z (z-h_b) dz + \int_{h_x}^{h_1} \mathbf{D}^{(1)} e_z (z-h_b) dz \right\} \\ \mathbf{C}_{rr} &= \left\{ \int_{-h_2}^{h_x} \mathbf{D}^{(2)} e_z^2 dz + \int_{h_x}^{h_1} \mathbf{D}^{(1)} e_z^2 dz \right\}; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\mathbf{C}_{zimp} = \left\{ \int_{-h_2}^{h_x} \mathbf{D}^{(2)} (z-h_b) dz + \int_{h_x}^{h_1} \mathbf{D}^{(1)} (z-h_b) dz \right\}$$

$$\mathbf{C}_{rimp} = \left\{ \int_{-h_2}^{h_x} \mathbf{D}^{(2)} e_z dz + \int_{h_x}^{h_1} \mathbf{D}^{(1)} e_z dz \right\};$$

$$\mathbf{C}_s = \left\{ \int_{-h_2}^{h_x} \mathbf{D}_s^{(2)} n_z dz + \int_{h_x}^{h_1} \mathbf{D}_s^{(1)} n_z dz \right\}$$

Giải phương trình (23), bài báo thu được tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của tấm nano composite tựa một phần trên nền đàn hồi.

3. KIỂM TRA SỰ CHÍNH XÁC CỦA LÝ THUYẾT TÍNH TOÁN

Tấm nano hình vuông $a = b = 10\text{nm}$, chiều dày của tấm h , các đặc trưng vật liệu $E = 30\text{MPa}$, $\nu = 0,3$, tấm làm bằng vật liệu có khối lượng riêng $\rho = 1$. Các cạnh của tấm nano đều tựa đơn.

Bảng 1. So sánh tần số dao động riêng của tấm nano với các giá trị khác nhau của tham số đàn hồi phi cục bộ

a/h	ψ_L (nm)	Tài liệu [6]	Tài liệu [6]	Tài liệu [6]	Tài liệu [12]	Bài báo
10	0	0,092	0,092	0,092	0,093	0,092
	0,5	0,084	0,084	0,084	0,085	0,084
	1	0,078	0,078	0,078	0,079	0,078
20	0	0,023	0,023	0,023	0,023	0,023
	0,5	0,021	0,021	0,021	0,021	0,021
	1	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020

Tham số so sánh là tần số dao động riêng đầu tiên của tấm nano được tính theo công thức $\Omega_1 = \omega_1 h / \sqrt{2\rho(1+\nu)/E}$. Kết quả so sánh được thể hiện trong bảng 1, sự gần nhau giữa các kết quả của bài báo

và các kết quả đã công bố chứng tỏ lý thuyết tính toán của bài báo đảm bảo độ tin cậy cần thiết.

4. KHẢO SÁT SỐ

Phần này tính toán dao động cho tấm nano composite có thông số $a = b = 10\text{nm}$, $h = a/10$. Các đặc trưng cơ tính của lớp trên và lớp dưới của tấm: $E_1 = 70\text{GPa}$, $\nu_1 = 0,3$, $\rho_1 = 2700\text{kg/m}^3$, $E_2 = 390\text{GPa}$, $\nu_2 = 0,3$, $\rho_2 = 3960\text{kg/m}^3$, quan hệ giữa các chiều dày $h_1 = 0,6h$, $h_2 = 0,4h$. Tấm tựa trên nền đàn hồi có độ cứng thay đổi theo tọa độ và tham số độ cứng không thứ nguyên được định nghĩa như sau:

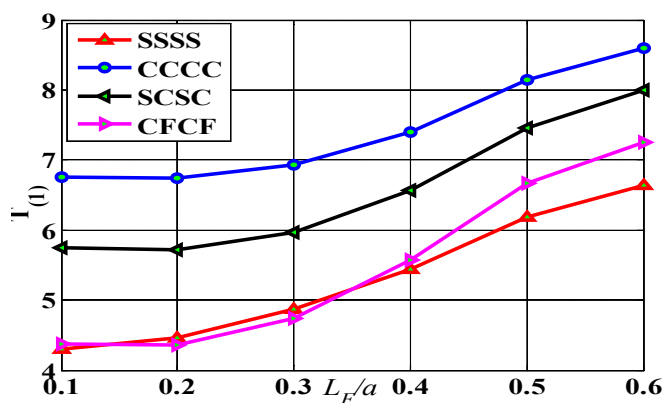
$$A_{kw} = \frac{H_w a^4}{B_w}; \quad B_w = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Tần số dao động riêng của tấm nano composite được khảo sát và có công thức tính toán như sau:

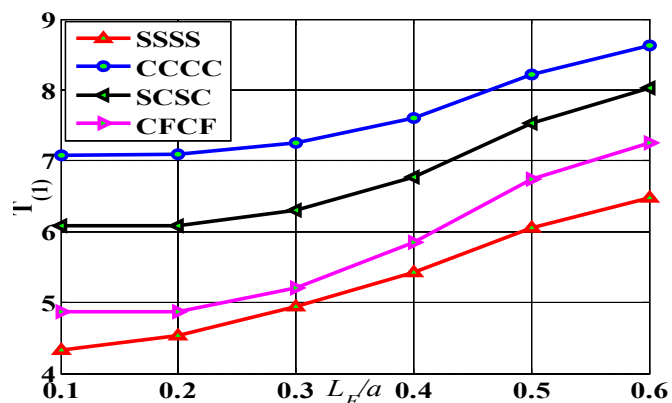
$$T_{(i)} = 10^2 \omega_i h \sqrt{\frac{\rho^{(2)}}{E^{(2)}}} \quad (27)$$

Trên hình 2 trình bày kết quả tính toán tần số dao động riêng đầu tiên phụ thuộc vào chiều dài của nền đàn hồi tương ứng với các điều kiện biên khác nhau, một số nhận xét được rút ra như sau: Khi tăng chiều dài của nền đàn hồi thì tần số dao động riêng của tấm nano composite tăng lên, điều này là do độ cứng của tấm nano composite đã tăng lên, và khối lượng của tấm thì không thay đổi khi chiều dài nền đàn hồi thay đổi. Với điều kiện biên tấm ngàm tất cả các cạnh thì tần số dao động của tấm nano composite là lớn nhất, tần số dao động riêng của tấm nano composite không chỉ phụ thuộc vào điều kiện biên, mà còn phụ thuộc vào dạng không hoàn hảo của tấm.

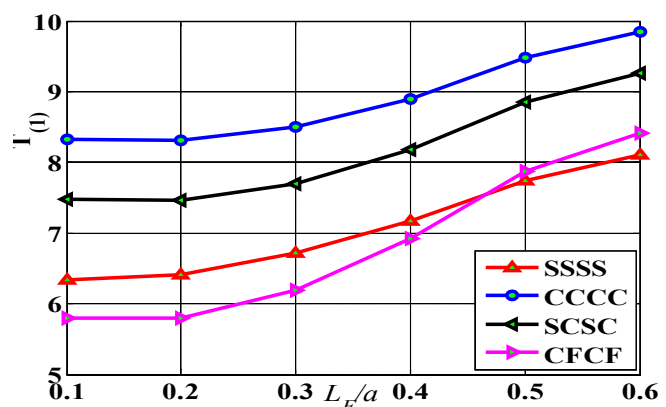
Hình 3 trình bày kết quả tính toán bốn tần số dao động riêng đầu tiên của tấm nano composite phụ thuộc vào số bước sóng N của biên dạng tiếp xúc giữa hai lớp. Khi số bước sóng N tăng lên thì tần số dao động riêng của tấm biến đổi theo đường cong phi tuyến, điều này là do ảnh hưởng của bước sóng N làm cho cả độ cứng và khối lượng của tấm thay đổi, và cũng tồn tại giá trị bước sóng thích hợp để tần số dao động của tấm đạt cực đại. Ứng với mỗi giá trị của bước sóng N thì giá trị của tần số dao động riêng của tấm nano composite khác nhau và phụ thuộc vào dạng không hoàn hảo của tấm. Trên hình 4 thể hiện năm dạng dao động riêng của tấm nano composite ứng với hai dạng không hoàn hảo hình dáng, từ các hình vẽ này, chúng ta thấy rằng dạng không hoàn hảo cũng ảnh hưởng đến các dạng dao động riêng của tấm nano composite, điều này thể hiện rõ ở các tần số cao.



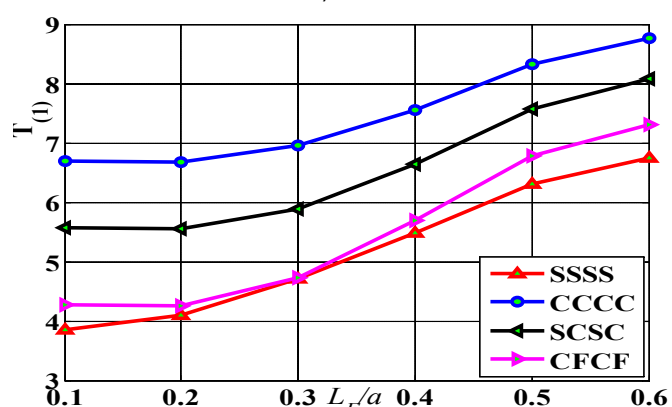
a) ĐH



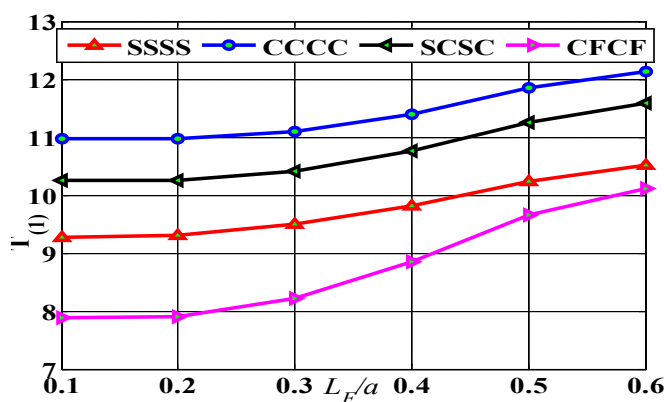
e) CB 1



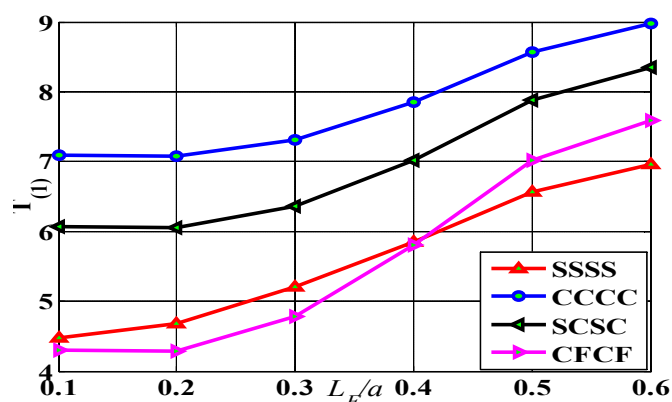
b) TC 1



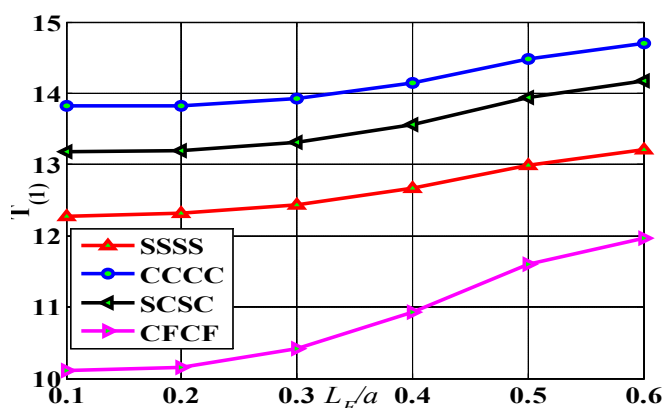
f) CB 2



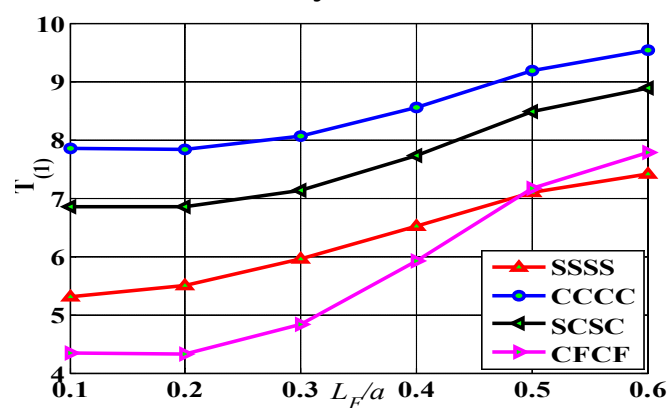
c) TC 2



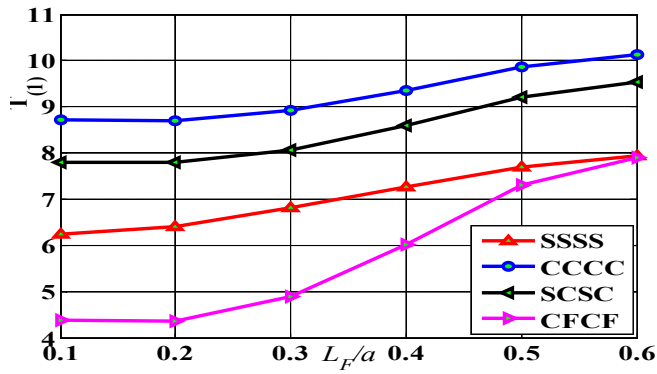
g) CB 3



d) TC 3

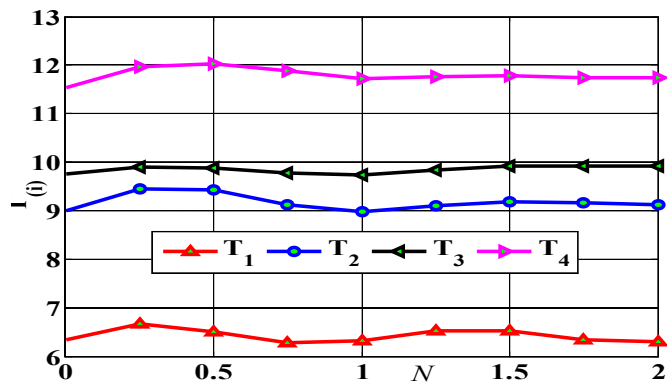


h) CB 4

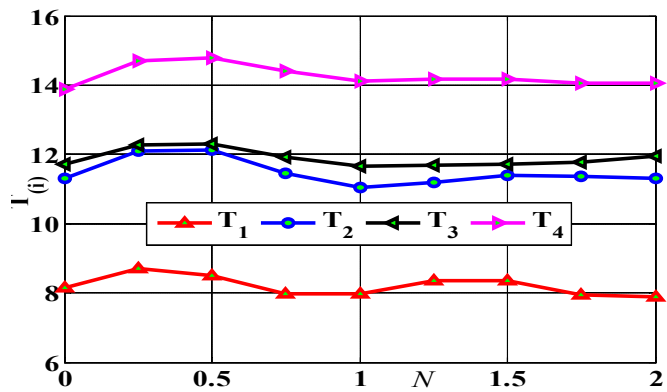


i) CB 5

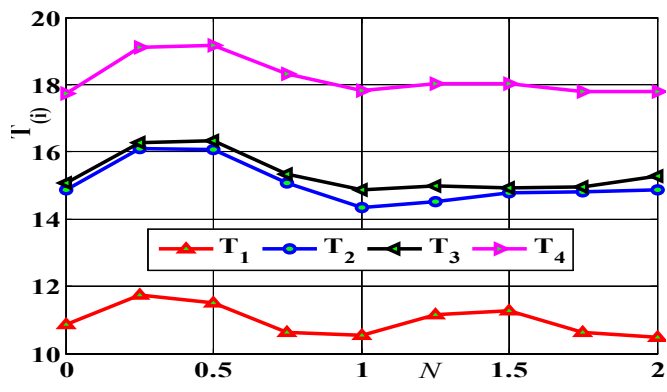
Hình 2. Tần số dao động riêng đầu tiên của tấm phụ thuộc chiều dài nền, $k_0/h_1 = 0.5$, sóng hình vuông, $N = 1$, $Y_{or} = 0.4$, $r_0 = 0.2$, $R_{im} = 0.3$, $c_w = 0.5$, $A_{kw} = 100$, $L_f/a = 0.5$, $\psi_l/h = 1$



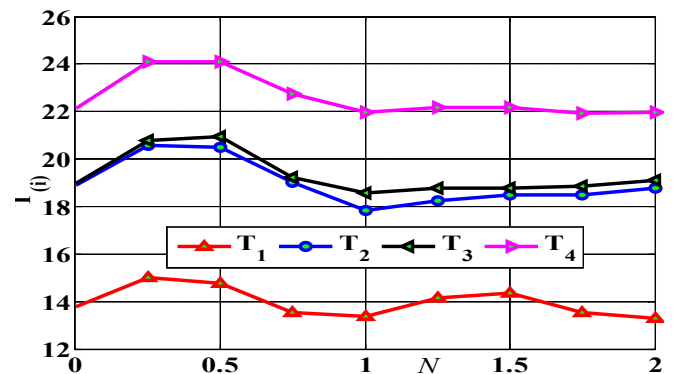
a) ĐH



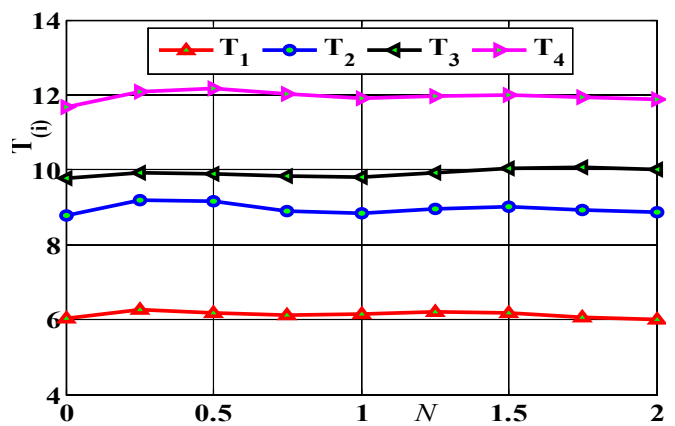
b) TC 1



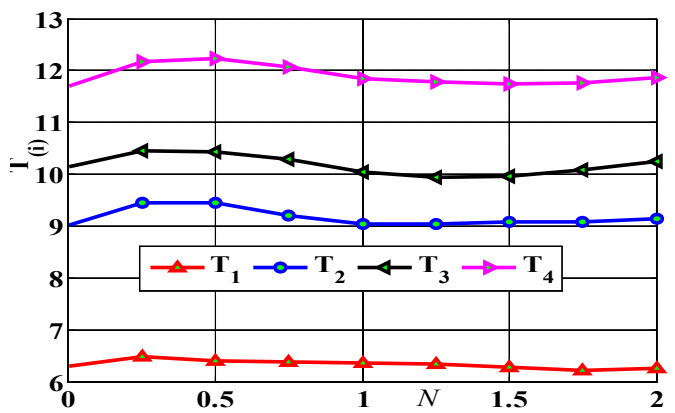
c) TC 2



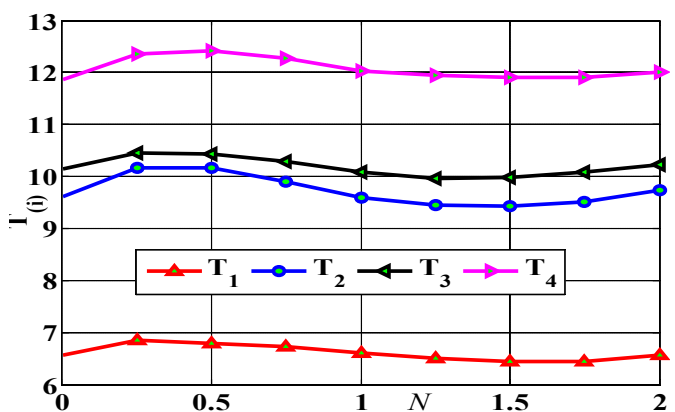
d) TC 3



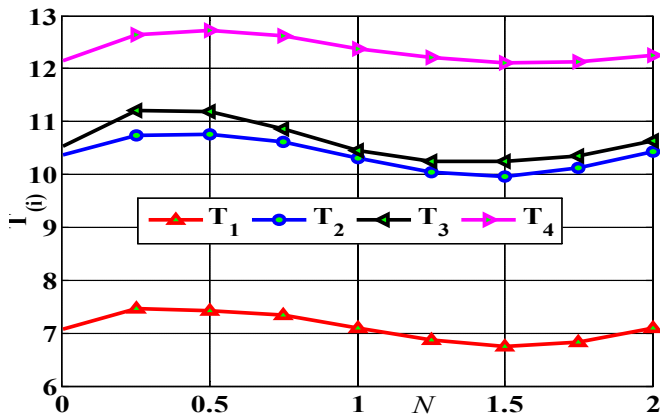
e) CB 1



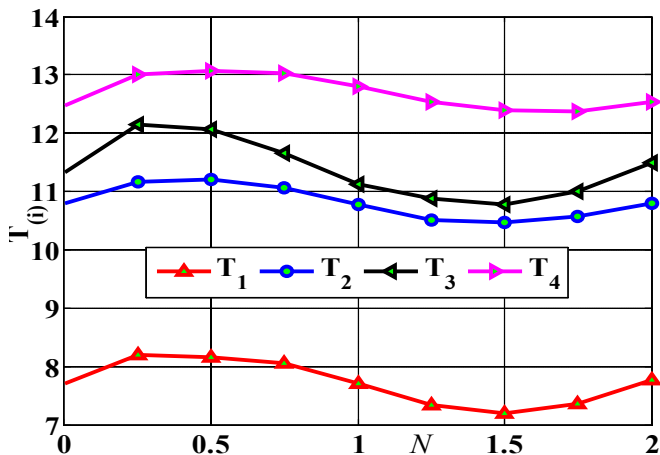
f) CB 2



g) CB 3

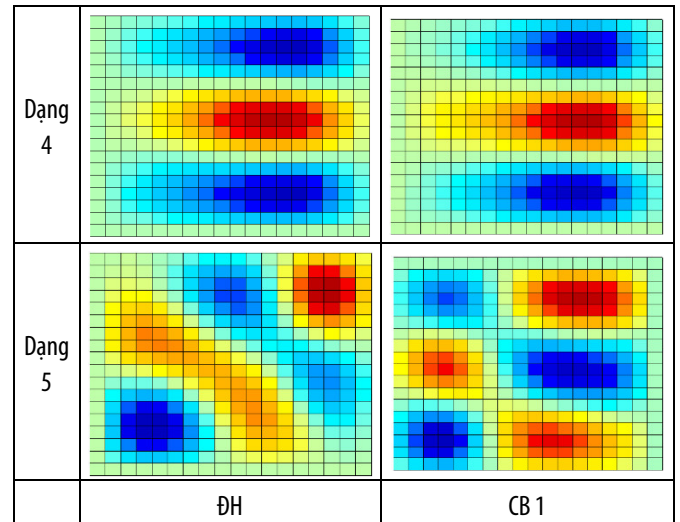
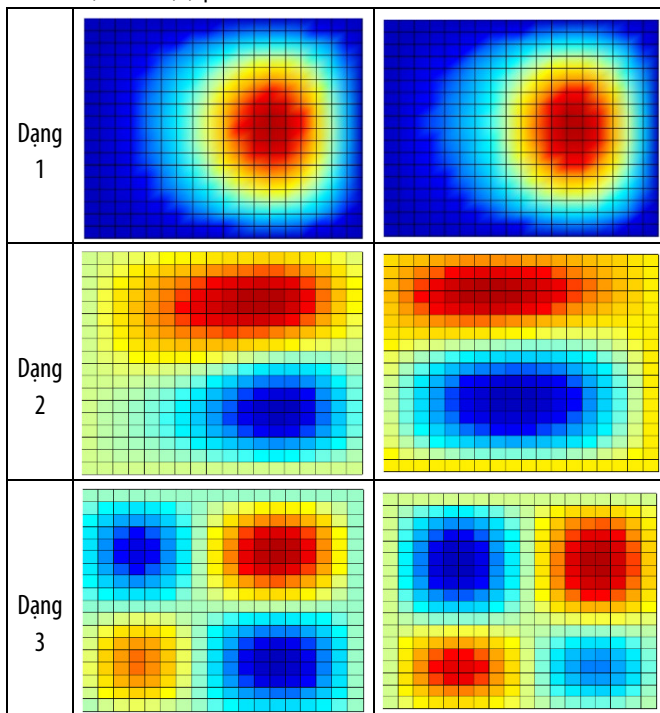


h) CB 4



i) CB 5

Hình 3. Tần số dao động riêng đầu tiên của tấm phụ thuộc số bước sóng N , $k_0/h_1 = 0,5$, sóng hình sin, $L_f = a/2$, $Y_{or} = 0,4$, $r_0 = 0,2$, $R_{im} = 0,3$, $c_w = 0,5$, $A_{kw} = 100$, $L_f/a = 0,5$, $\psi_L/h = 1$



Hình 4. Năm dạng tần số dao động riêng đầu tiên của tấm $N = 1$, $k_0/h_1 = 0,5$, sóng hình sin, $L_f = a/2$, $Y_{or} = 0,4$, $r_0 = 0,2$, $R_{im} = 0,3$, $c_w = 0,5$, $A_{kw} = 10^4$, $L_f/a = 0,5$, $\psi_L/h = 1$

5. KẾT LUẬN

Bằng việc sử dụng phần tử bốn nút, mỗi nút có sáu bậc tự do, bài báo này đã phân tích dao động riêng của tấm composite nhiều lớp tựa một phần trên nền đàn hồi, sự độ đảo của nghiên cứu này là xem xét các lớp tiếp xúc với nhau theo biên dạng phức tạp. Công thức tính toán được thiết lập dựa trên lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới, trong đó chuyển vị theo phương vuông góc với tấm được phân ra thành hai thành phần uốn và cắt, lý thuyết tính toán được minh chứng sự tin cậy nhờ việc so sánh kết quả tính toán tần số dao động với các kết quả đã công bố. Bài báo tính toán số nhằm làm rõ ảnh hưởng của một số tham số như chiều dài nền đàn hồi, điều kiện biên, số sóng của biên dạng tiếp xúc giữa hai lớp tới tần số dao động riêng và các dạng dao động của tấm composite. Nghiên cứu này có giá trị quan trọng trong thiết kế các tấm composite trong thực tế.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Q. Li, Y. Song, J. Sanchez, Z. Sheng, Z. Wang, "Series solutions for free in-plane vibration of composite plates with arbitrary shape," *Archive of Applied Mechanics*, 95, 28-39, 2025.
- [2] P. T. Hung, C. H. Thai, P. Phung-Van, "A novel meshfree method for free vibration behavior of the functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using a new shear deformation theory," *Computers & Mathematics with Applications* 189, 208-224, 2025.
- [3] V. H. Binh, N. D. Anh, D. V. Thom, P. V. Minh, H. T. Dung, "Vibration response of nanobeams subjected to random reactions," *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 109, 105489, 2025.

- [4] D. H. Doan, A. M. Zenkour, D. V. Thom, "Finite element modeling of free vibration of cracked nanoplates with flexoelectric effects," *Eur. Phys. J. Plus*, 137, 447, 2022. doi: 10.1140/epjp/s13360-022-02631-9
- [5] N. C. Tho, T. Abdelouahed, V. T. Do, V. M. Phung, "Effect of flexomagneticity on the dynamic response of nanoplates using FEM," *Comp. Concr.*, 35, 5, 527-536, 2025. doi: 10.12989/cac.2025.35.5.527
- [6] D. M. Tien, D. V. Thom, P. V. Minh, N. C. Tho, T. N. Doan, D. N. Mai, "The application of the nonlocal theory and various shear strain theories for bending and free vibration analysis of organic nanoplates," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2023. <https://doi.org/10.1080/15397734.2023.2186893>
- [7] V. T. Than, T. H. H. Truong, V. D. Dao, "Vibration and buckling analysis of nanoplates resting on variable elastic foundations," *Transp. Comm. Science J.*, 75, 9, 2238-2251, 2024. doi: 10.47869/tcsj.75.9.1.
- [8] C. V. Minh, T. V. Do, P. V. Minh, C. T. Nguyen, T. L. Doan, H. H. Nguyen, "Investigation of mechanical responses of flexo-magnetic variable thickness nanoplates resting on elastic foundations, taking into account geometrical imperfections," *Front. Struct. Civil Eng.*, 18, 1951-1970, 2024. doi: 10.1007/s11709-024-1093-z.
- [9] N. C. Tho, D. M. Tien, D. V. Thom, P. V. Minh, D. V. Doan, "A new approach to the static bending problem of organic nanoplates," in *Proc. Inst. Mech. Eng., Part C: J. Mech. Eng. Science*, 239, 8, 3052-3064, 2024, doi:10.1177/09544062241306986
- [10] D. M. Tien, D. V. Thom, P. V. Minh, P. H. Hieu, "Bending and buckling responses of organic nanoplates considering the size effect," *Transp. Comm. Science J.*, 75, 7, 2015-2029, 2024. doi: 10.47869/tcsj.75.7.1
- [11] P. Q. Phuc, P. V. Dong, N. T. Hai, A. M. Zenkour, L. G. Thien, "The application of novel shear deformation theory and nonlocal elasticity theory to study the mechanical response of composite nanoplates," *Composite Structures*, 352, 118646, 2025. doi: 10.1016/j.compstruct.2024.118646.
- [12] R. Aghababaei, J. N. Reddy, "Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates," *J. Sound Vib.*, 326, 1-2, 277-289, 2009. doi: 10.1016/j.jsv.2009.04.044

AUTHORS INFORMATION

**Dao Van Vuong¹, Phan Quang phuc², Pham Huy Hieu³,
Do Van Thom¹, Pham Van Dong²**

¹Military Technical Academy, Vietnam

²Hanoi University of Industry, Vietnam

³Air Force-Air Defence Technical Institute, Vietnam