

NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH NHIỆT CỦA TẤM NANO

A STUDY ON THE THERMAL STABILITY OF NANO PLATE

Hoàng Xuân Lượng¹,
Đỗ Ngọc Tiến^{2,*}, Bùi Xuân Tùng²

DOI: <https://doi.org/10.57001/huinh5804.2026.163>

TÓM TẮT

Các màng mỏng thường được sử dụng rộng rãi trong công nghệ hiện đại như màng sơn phủ của bề mặt ô tô, màng mỏng trên các bề mặt điện thoại cảm ứng. Các lớp màng này rất mỏng, có thể ở kích thước nano và có thể mô hình như tấm kích thước nano, một trong những dạng chịu tải chính của chúng trong thực tế là nhiệt độ. Nghiên cứu này sử dụng phương pháp giải tích để phân tích ổn định nhiệt của màng mỏng kích thước nano dạng tấm làm bằng vật liệu có cơ tính biến đổi và tựa trên nền đàn hồi hai hệ số. Các công thức tính toán được thiết lập dựa trên lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới, lời giải Navier được sử dụng nhằm tìm ra được biểu thức tính toán cụ thể của tải nhiệt tới hạn của màng mỏng nano khi chịu tải nhiệt. Công thức tính toán được kiểm chứng thông qua so sánh với các kết quả đã công bố nhằm làm rõ ảnh hưởng của các tham số hình học, vật liệu đến khả năng chịu tải nhiệt của màng mỏng này. Các kết quả tính toán làm cơ sở khoa học cho việc thiết kế và chế tạo các màng mỏng trong thực tế, trong đó có ngành công nghiệp ô tô.

Từ khóa: Ổn định nhiệt; tấm nano; nền đàn hồi; cơ tính biến đổi.

ABSTRACT

Thin films are widely used in modern technologies, such as coating layers on automobile surfaces and thin layers on touch-screen devices. These films are extremely thin, often at the nanoscale, and one of the primary loading conditions they experience in practice is thermal loading. This study employs an analytical approach to investigate the thermal stability of nanoscale thin film plates made of functionally graded materials and resting on a two-parameter elastic foundation. The governing equations are established based on a refined shear deformation theory, and the Navier solution is adopted to derive explicit expressions for the critical thermal load of the nanoscale thin film under thermal effects. The obtained formulations are validated through comparisons with previously published results, thereby clarifying the influences of geometric and material parameters on the thermal load-bearing capacity of the thin film. The findings provide a scientific basis for the design and fabrication of thin film structures in practical applications, including the automotive industry.

Keywords: Thermal stability; Nanoplates; Elastic foundation; Functionally graded materials.

¹Học viện Kỹ thuật Quân sự

²Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải

*Email: tiendn@utt.edu.vn

Ngày nhận bài: 25/3/2026

Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 26/5/2026

Ngày chấp nhận đăng: 29/6/2026

1. GIỚI THIỆU

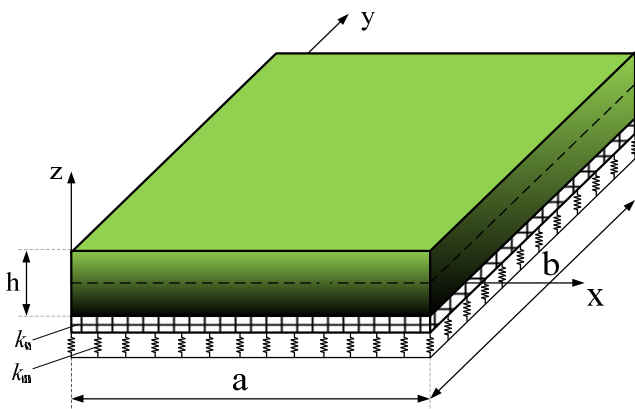
Cùng với sự phát triển của khoa học kỹ thuật, các màng mỏng có chiều dày cỡ nano đang được sử dụng rộng rãi trong thực tế, chúng có thể là lớp sơn phủ trong công nghiệp ô tô, chúng có thể là một phần của các vi mạch hiện đại,... Việc tính toán đáp ứng cơ học của các kết cấu kích thước nano trở thành nhu cầu cấp thiết và đã thu hút được sự tham gia đông đảo của các nhà khoa học.

Son và Minh [1] sử dụng lời cách tiếp cận của phương pháp phần tử hữu hạn và lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới để phân tích đáp ứng uốn tĩnh và ổn định của tấm nano có kể đến hiệu ứng flexomagnetic và lực tác dụng cục bộ lên tấm. Phúc và đồng nghiệp [2] cũng dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn để chỉ rõ đáp ứng tĩnh của tấm nano gồm hai lớp composite tiếp xúc với nhau theo biên dạng phức tạp, trong đó hiệu ứng kích thước đã được chỉ

ra thông qua lý thuyết đàn hồi phi cục bộ. Long và cộng sự [3] đã xuất phát từ lý thuyết biến dạng cắt bậc ba để phân tích ảnh hưởng của lỗ rỗng vi mô đến đáp ứng uốn tĩnh và ổn định của tấm nano có kể đến hiệu ứng bề mặt. Van và cộng sự [4] đã dựa trên lời giải dạng giải tích để chỉ ra các đáp ứng cơ học của tấm nano tựa trên nền đàn nhớt và có xét đến ảnh hưởng của môi trường đa vật lý. Ke và nhóm nghiên cứu [5] phân tích ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước đến chuyển vị uốn tĩnh của vỏ nano hai độ cong nhiều lớp, trong đó lớp bề mặt làm bằng vật liệu có hiệu ứng flexoelectric. Tien và đồng nghiệp [6] cũng chỉ ra ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước đến ổn định và dao động của tấm nano organic, trong đó có xét đến cản nhớt của vật liệu.

Từ các kết quả đã công bố, có thể thấy rằng vấn đề ổn định nhiệt của kết cấu kích thước nano nói chung và tấm nano nói riêng chưa được nghiên cứu triệt để. Trong bối cảnh công nghệ hiện đại, các tấm nano được sử dụng rộng rãi trong công nghiệp ô tô và vi mạch điện tử, đặc biệt khi chúng được phủ các lớp vật liệu chức năng nhằm tăng độ bền và khả năng chống chịu môi trường. Dưới tác động của nhiệt độ cao hoặc biến thiên nhiệt, sự mất ổn định của các kết cấu kích thước nano có thể xảy ra, ảnh hưởng trực tiếp đến độ tin cậy và tuổi thọ của thiết bị. Các lớp sơn phủ bề mặt trong ô tô không chỉ đóng vai trò bảo vệ mà còn tham gia vào quá trình truyền nhiệt và ứng xử cơ học của hệ. Tương tự, trong vi mạch điện tử, các lớp phủ siêu mỏng có thể làm thay đổi đáng kể đặc trưng ổn định nhiệt của các tấm nano nền. Do đó, việc phân tích và dự đoán chính xác ổn định nhiệt của tấm nano có xét đến ảnh hưởng của tấm nano là yêu cầu cấp thiết, góp phần tối ưu hóa thiết kế và đảm bảo hiệu suất làm việc của các hệ kỹ thuật tiên tiến. Chính vì yêu cầu đó mà bài báo này sử dụng lời giải dạng Navier để giải quyết bài toán ổn định nhiệt của tấm nano trên nền đàn hồi hai hệ số.

2. CÔNG THỨC TÍNH TOÁN



Hình 1. Mô hình tấm nano tựa trên nền đàn hồi hai hệ số

Hình 1 chỉ ra mô hình tấm nano đặt trong hệ trục tọa độ Đề Các Oxyz, tấm gồm hai cạnh được ký hiệu là a và b , chiều dày tấm là h , tấm tựa trên nền đàn hồi với hai tham số độ cứng k_w và k_s .

Khi tính toán các kết cấu nói chung và tính toán tấm nói riêng, các nhà khoa học thường biểu diễn các thành phần chuyển vị theo ba trục tọa độ Đề Các bằng những dạng hàm khác nhau. Mỗi loại hàm đều có những ưu điểm và hạn chế nhất định. Trong nghiên cứu này, trường chuyển vị của một điểm bất kỳ thuộc tấm có dạng như sau:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{3b} + u_{3s} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_{3b}}{\partial x} \\ \frac{\partial u_{3b}}{\partial y} \\ 0 \end{Bmatrix} - k_z \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_{3s}}{\partial x} \\ \frac{\partial u_{3s}}{\partial y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

trong đó, u_1, u_2, u_3 là các thành phần chuyển vị dọc theo các trục Ox, Oy và Oz, thành phần chuyển vị dọc theo trục Oz được phân ra thành hai thành phần, một thành phần liên quan đến uốn và một thành phần liên quan đến cắt và hàm g_z có dạng:

$$k_z = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (2)$$

Từ biểu thức trường chuyển vị (1), ta tính được các thành phần biến dạng:

$$\begin{aligned} \epsilon_{zx} &= -\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x^2}; \epsilon_{zy} = -\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial y^2}; \gamma_{zxy} = -2\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x \partial y}; \\ \epsilon_{gx} &= -\frac{\partial^2 u_{3s}}{\partial x^2}; \epsilon_{gy} = -\frac{\partial^2 u_{3s}}{\partial y^2}; \\ \gamma_{gxy} &= -2\frac{\partial^2 u_{3s}}{\partial x \partial y}; \gamma_{sxz} = \frac{\partial u_{3s}}{\partial x}; \gamma_{syx} = \frac{\partial u_{3s}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

Biểu thức (3) được viết lại ở dạng véc tơ:

$$\epsilon = z \epsilon_z + g_z \epsilon_e; \gamma_s = k_z \gamma_{s0} \quad (4)$$

với $g_z = 1 - dk_z / dz$ và

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= \{\epsilon_{zx}, \epsilon_{zy}, \epsilon_{zxy}\}^T; \epsilon_e = \{\epsilon_{gx}, \epsilon_{gy}, \epsilon_{gxy}\}^T; \\ \gamma_{s0} &= \{\gamma_{sxz}, \gamma_{syx}\}^T \end{aligned} \quad (5)$$

Khi tính toán kết cấu kích thước nano, cần phải xét đến hiệu ứng kích thước, nghiên cứu này sử dụng lý thuyết biến thiên biến dạng, do vậy liên hệ giữa các thành phần ứng suất và biến dạng có dạng sau:

$$\sigma_{mn} = C_{mnkq} (1 \pm m^2 \nabla^2) \epsilon_{kq}; \tau_{ij} = C_{ij} (1 \pm m^2 \nabla^2) \gamma_{ij} \quad (6)$$

trong đó, m là tham số thể hiện ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước theo lý thuyết biến thiên biến dạng; dấu

"+" và dấu "-" tương ứng với trường hợp 1 và trường hợp 2, hai trường hợp này thể hiện ảnh hưởng khác nhau của hiệu ứng kích thước; ∇^2 là ký hiệu của toán tử Laplace; σ_{mn} là ứng suất pháp và C_{mnkq} là các tham số đặc trưng cho tham số vật liệu của tấm nano.

Biểu thức (6) được viết cụ thể ở dạng:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_b (1 \pm m^2 \nabla^2) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{33} & 0 \\ 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_s (1 \pm m^2 \nabla^2) \boldsymbol{\gamma}_s \quad (8)$$

trong đó:

$$C_{11} = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2}; C_{12} = \nu C_{11}; C_{33} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))};$$

$$\mathbf{C}_b = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}; \mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} C_{33} & 0 \\ 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m + (E_c - E_m)V_c(z) \\ \alpha(z) &= \alpha_m + (\alpha_c - \alpha_m)V_c(z) \\ \nu(z) &= \nu_m + (\nu_c - \nu_m)V_c(z) \end{aligned} \quad (10)$$

với E , α và ν là mô đun đàn hồi, hệ số giãn nở nhiệt, hệ số Poisson, chỉ số m ký hiệu cho vật liệu kim loại và chỉ số c ký hiệu cho vật liệu gốm. Và tỷ lệ thể tích vật liệu gốm:

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n \quad (11)$$

trong đó, n là số dương, đây là tham số chỉ số mũ thể tích của vật liệu.

Sau khi tích phân, ta thu được các thành phần nội lực của tấm nano như sau:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \\ &\quad \pm m^2 \nabla^2 \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \\ &= \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_z + \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_g \pm m^2 \nabla^2 \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_z \pm m^2 \nabla^2 \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_g \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} T \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} k_z dz \\ &\quad \pm m^2 \nabla^2 \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} k_z dz \\ &= \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_z + \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_g \pm m^2 \nabla^2 \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_z \pm m^2 \nabla^2 \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_g \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{33} & 0 \\ 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} dz \\ &\quad \pm m^2 \nabla^2 \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{33} & 0 \\ 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} dz \\ &= \mathbf{H} \boldsymbol{\gamma}_{s0} \pm m^2 \nabla^2 \mathbf{H} \boldsymbol{\gamma}_{s0} \end{aligned} \quad (14)$$

với

$$\begin{aligned} \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \{z^2, zk_z, k_z^2\} dz; \\ \mathbf{H} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{33} & 0 \\ 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} g_z^2 dz \end{aligned} \quad (15)$$

Để xây dựng phương trình cân bằng cho tấm nano, bài báo sử dụng nguyên lý công khả dĩ:

$$\delta \Psi_{nl} + \delta \Psi_{ndh} - \delta \Psi_{ngl} = 0 \quad (16)$$

trong đó, $\delta \Psi_{nl}$, $\delta \Psi_{ndh}$ và $\delta \Psi_{ngl}$ tương ứng là công khả dĩ của nội lực do biến dạng, công khả dĩ của nền đàn hồi và công khả dĩ của nhiệt độ.

Biểu thức công khả dĩ của nội lực do biến dạng của tấm nano:

$$\begin{aligned} \delta \Psi_{nl} &= \int_{\Omega} \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \left(\delta(\varepsilon_x)^i (\sigma_x)^i + \delta(\varepsilon_y)^i (\sigma_y)^i \right. \\ &\quad \left. + \delta(\varepsilon_{xy})^i (\sigma_{xy})^i + \delta(\gamma_{xz})^i (\tau_{xz})^i \right. \\ &\quad \left. + \delta(\gamma_{yz})^i (\tau_{yz})^i \right) dz d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \left(-M_x \frac{\partial^2 \delta u_{3b}}{\partial x^2} - T_x \frac{\partial^2 \delta u_{3s}}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. - M_y \frac{\partial^2 \delta u_{3b}}{\partial y^2} - T_y \frac{\partial^2 \delta u_{3s}}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta u_{3b}}{\partial x \partial y} - 2T_{xy} \frac{\partial^2 \delta u_{3s}}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. + Q_{xz} \frac{\partial \delta u_{3s}}{\partial x} + Q_{yz} \frac{\partial \delta u_{3s}}{\partial y} \right) dz d\Omega \end{aligned} \quad (17)$$

Công khả dĩ của nền đàn hồi có dạng:

$$\delta\mathcal{V}_{ndh} = \int_S k_w u_3 \delta u_3 dS + \int_S k_s \left\{ \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta u_3}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta u_3}{\partial y} \right) \right\} dS \quad (18)$$

trong đó, k_w và k_s là hai hệ số độ cứng của nền đàn hồi.

Biểu thức công khả dĩ của nhiệt độ môi trường:

$$\delta\mathcal{V}_{ngl} = \int_S N_T \left\{ \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta u_3}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta u_3}{\partial y} \right) \right\} dS = \int_S N_T \left\{ \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta u_3}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta u_3}{\partial y} \right) \right\} dS \quad (19)$$

trong đó, N_T là lực nhiệt tác dụng lên tấm nano;

$N_T = \int_0^h E(z) \alpha(z) \Delta T dz$, $\alpha(z)$ là hệ số giãn nở nhiệt và ΔT là chênh lệch nhiệt độ của môi trường so với nhiệt độ không phát sinh ứng suất.

Sau khi biến đổi, ta thu được hệ phương trình cân bằng của tấm nano như sau:

$$\delta u_{3b} : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - N_T \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) + k_w u_3 + k_s \left\{ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right\} = 0 \quad (20)$$

$$\delta u_{3s} : \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 T_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - N_T \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) + k_w u_3 + k_s \left\{ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right\} = 0 \quad (21)$$

Để giải hệ phương trình trên, bài báo sử dụng dạng nghiệm Navier với biểu thức chuyển vị biểu diễn ở dạng chuỗi lượng giác như sau:

$$u_{3b} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{0b} \sin \left(t \frac{\pi}{a} x \right) \sin \left(s \frac{\pi}{b} y \right) u_{3s} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{0s} \sin \left(t \frac{\pi}{a} x \right) \sin \left(s \frac{\pi}{b} y \right) \quad (22)$$

trong đó, t và s là số nguyên dương. G_{0b} và G_{0s} là các biên độ của các thành phần chuyển vị tương ứng. Sau khi biến đổi, ta thu được hệ phương trình cân bằng của tấm nano:

$$\begin{aligned} & -A_{11} G_{0b} (\varphi^4 + \psi^4) - 2(A_{12} + 2A_{33}) G_{0b} \varphi^2 \psi^2 \\ & -B_{11} G_{0s} (\varphi^4 + \psi^4) - 2(B_{12} + 2B_{33}) G_{0s} \varphi^2 \psi^2 \\ & \pm m^2 \left[\begin{aligned} & (A_{11} + A_{12}) G_{0b} \varphi^6 + A_{11} G_{0b} \psi^6 \\ & + (A_{11} + 2A_{12} + 4A_{33}) G_{0b} \varphi^4 \psi^2 \\ & + (A_{11} + A_{12} + 4A_{33}) G_{0b} \varphi^2 \psi^4 + (B_{11} + B_{12}) G_{0s} \varphi^6 \\ & + B_{11} G_{0s} \psi^6 + (B_{11} + B_{12} + 4I^2 B_{33}) G_{0s} \varphi^2 \psi^4 \\ & + (B_{11} + 2B_{12} + 4I^2 B_{33}) G_{0s} \varphi^4 \psi^2 \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & + N_T (G_{0b} + G_{0s}) (\varphi^2 + \psi^2) + k_w (G_{0b} + G_{0s}) \\ & - k_s (G_{0b} + G_{0s}) (\varphi^2 + \psi^2) = 0 \\ & -B_{11} G_{0b} (\varphi^4 + \psi^4) - 2(B_{12} + 2B_{33}) G_{0b} \varphi^2 \psi^2 \\ & - (D_{11} + H_{33} m^2) G_{0s} (\varphi^4 + \psi^4) \\ & - 2(D_{12} + 2D_{33} + H_{33} I^2) G_{0s} \varphi^2 \psi^2 \\ & \pm m^2 \left[\begin{aligned} & + (B_{11} + B_{12}) G_{0b} \varphi^6 + B_{11} G_{0b} \psi^6 \\ & + (B_{11} + 2B_{12} + 4B_{33}) G_{0b} \varphi^4 \psi^2 \\ & + (B_{11} + B_{12} + 4B_{33}) G_{0b} \varphi^2 \psi^4 \\ & + (D_{11} + D_{12}) G_{0s} \varphi^6 + D_{11} G_{0s} \psi^6 \\ & + (D_{11} + D_{12} + 4D_{33}) G_{0s} \varphi^2 \psi^4 \\ & + (D_{11} + 2D_{12} + 4D_{33}) G_{0s} \varphi^4 \psi^2 \\ & - H_{33} G_{0s} (\varphi^4 + 2\varphi^2 \psi^2 + \psi^4) \end{aligned} \right] \\ & - H_{33} G_{0s} (\varphi^2 + \psi^2) + N_T (G_{0b} + G_{0s}) (\varphi^2 + \psi^2) \\ & + k_w (G_{0b} + G_{0s}) - k_s (G_{0b} + G_{0s}) (\varphi^2 + \psi^2) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

trong đó A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} và H_{ij} là các phần tử của các ma trận **A**, **B**, **D**, **H** được xác định như (15).

Sau khi nhóm các biên độ chuyển vị, ta thu được dạng gọn hơn:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_{0b} \\ G_{0s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

trong đó

$$\begin{aligned} Y_{11} &= N_T (\varphi^2 + \psi^2) + 2(2A_{33} + A_{12}) \varphi^2 \psi^2 + A_{11} (\psi^4 + \varphi^4) + k_w \\ & - k_s (\varphi^2 + \psi^2) \pm m^2 \left[\begin{aligned} & (A_{11} + A_{12}) \varphi^6 + A_{11} \psi^6 \\ & + (A_{11} + 2A_{12} + 4A_{33}) \varphi^4 \psi^2 \\ & + (A_{11} + A_{12} + 4A_{33}) \varphi^2 \psi^4 \end{aligned} \right] \\ Y_{12} &= N_T (\varphi^2 + \psi^2) + 2(2B_{33} + B_{12}) \varphi^2 \psi^2 + B_{11} (\psi^4 + \varphi^4) + k_w \\ & - k_s (\varphi^2 + \psi^2) \pm m^2 \left[\begin{aligned} & (2B_{12} + B_{11} + 4B_{33}) \varphi^4 \psi^2 \\ & + (B_{12} + B_{11} + 4B_{33}) \varphi^2 \psi^4 \\ & + (B_{12} + B_{11}) \varphi^6 + B_{11} \psi^6 \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
Y_{21} &= N_T (\varphi^2 + \psi^2) + 2(B_{12} + 2B_{33})\varphi^2\psi^2 \\
&\quad + B_{11}(\varphi^4 + \psi^4) + k_w - k_s(\varphi^2 + \psi^2) \\
&\quad \pm m^2 \left[\begin{aligned} &(B_{11} + 2B_{12} + 4B_{33})\varphi^2\psi^4 \\ &+ (B_{11} + 2B_{12} + 4B_{33})\varphi^4\psi^2 \\ &+ (B_{11} + B_{12})\varphi^6 + B_{11}\psi^6 \end{aligned} \right] \\
Y_{22} &= N_T (\varphi^2 + \psi^2) + D_{11}(\varphi^4 + \psi^4) + 2(D_{12} + 2D_{33})\varphi^2\psi^2 \quad (27) \\
&\quad + H_{33}(\varphi^2 + \psi^2) + k_w - k_s(\varphi^2 + \psi^2) \\
&\quad \pm m^2 \left[\begin{aligned} &+(D_{11} + D_{12} + 4D_{33})\varphi^2\psi^4 \\ &+(D_{11} + 2D_{12} + 4D_{33})\varphi^4\psi^2 \\ &+(D_{11} + D_{12})\varphi^6 + D_{11}\psi^6 \\ &-H_{33}(\varphi^4 + 2\varphi^2\psi^2 + \psi^4) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\varphi = t/a, \psi = s/b$$

Thông qua giải hệ phương trình (25), ta thu được biểu thức của N_T và giá trị nhỏ nhất của N_T chính là tải tới hạn của tấm nano khi chịu tác dụng của nhiệt độ.

3. KIỂM CHỨNG ĐỘ TIN CẬY

Phần này đưa ra ví dụ kiểm chứng độ tin cậy của lý thuyết tính toán ở phần trên, tấm vuông với tỷ lệ các cạnh $a/b = 1$, chiều dày tấm là $h = 0,34\text{nm}$, vật liệu tấm có mô đun đàn hồi 30MPa, hệ số Poisson của vật liệu là 0,3. Tham số so sánh là tải tới hạn của tấm khi chịu tải nén trên cả bốn cạnh tấm là:

$$H_{bl} = N_T \frac{a^2}{\pi^2 D_{buck}}, D_{buck} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (28)$$

Bảng 1 trình bày kết quả tính toán và so sánh tải tới hạn đối với các kết quả tính bằng phương pháp giải tích trong các tài liệu [6-8], sự khác biệt ở đây là do lý thuyết tấm của bài báo là khác biệt so với các lý thuyết tấm trong các tài liệu so sánh. Và sự sai lệch nhỏ giữa các kết quả, có thể kết luận rằng phương pháp tính toán của bài báo là hoàn toàn đảm bảo độ chính xác.

Bảng 1. So sánh tải tới hạn của tấm khi chiều dày tấm thay đổi

Nguồn	a/h = 10	a/h = 20	a/h = 30
Tài liệu [6]	1,893	1,972	1,987
Tài liệu [7]	1,893	1,972	1,987
Tài liệu [8]	1,893	1,972	1,987
Bài báo	1,894	1,973	1,988

4. TÍNH TOÁN SỐ VÀ THẢO LUẬN

Phần này sẽ trình bày ổn định nhiệt của tấm nano làm bằng vật liệu composite có cơ tính biến đổi (Al/ZrO₂), tấm

có chiều dài $a = 100\text{nm}$, chiều dài cạnh b biến đổi từ $0,9a$ đến $2,5a$, chiều dày tấm h biến đổi từ $a/10$ đến $a/25$. Các đặc trưng cơ tính của vật liệu như sau: $E_m(\text{Al}) = 70\text{GPa}$, $E_c(\text{ZrO}_2) = 151\text{GPa}$, $\alpha_m = 23 \times 10^{-6} (1/^\circ\text{C})$, $\alpha_c = 10 \times 10^{-6} (1/^\circ\text{C})$, $\nu_m = \nu_c = 0,3$.

Tấm tựa trên nền đàn hồi với hai tham số độ cứng được chuẩn hóa:

$$\tilde{K}_1 = \frac{12k_w a^4}{E_m h_0^3}, \tilde{K}_2 = \frac{12k_s a^2}{E_m h_0^3}$$

Tải nhiệt tới hạn của tấm nano được chuẩn hóa theo công thức:

$$R_{bl} = N_0 \frac{a^2}{\pi^2 D_t} \quad (29)$$

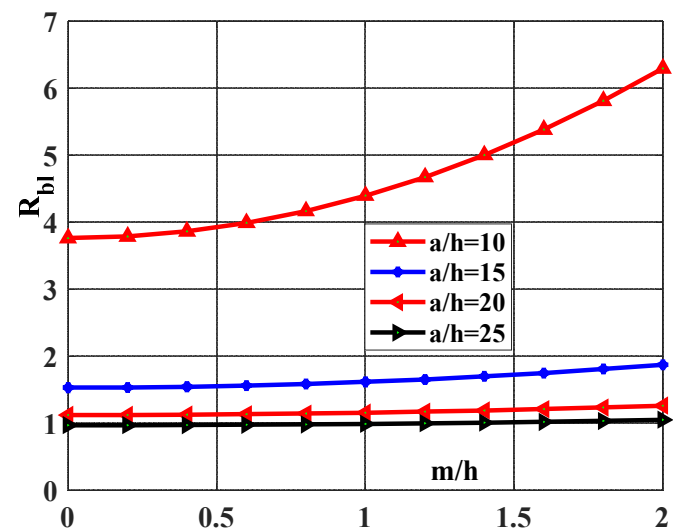
$$\text{trong đó: } D_t = \frac{E_m h_0^3}{12(1-\nu_m^2)}, h_0 = a/10.$$

Hình 2 trình bày kết quả tính toán tải tới hạn của tấm nano phụ thuộc vào chiều dày tấm, bài báo nhận thấy rằng:

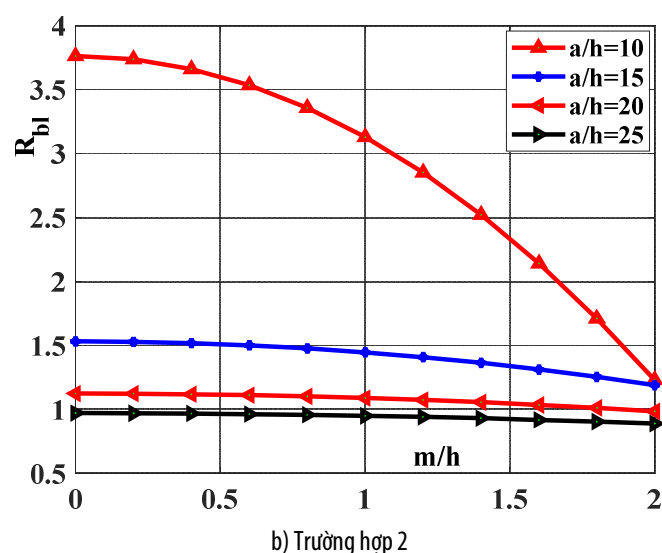
+ Khi tăng chiều dày tấm nano, tải nhiệt tới hạn của tấm nano tăng lên, điều này là do chiều dày tấm tăng làm cho tấm nano trở nên cứng hơn.

+ Tấm càng dày thì mức độ ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước càng thể hiện rõ rệt khi tham số m thay đổi.

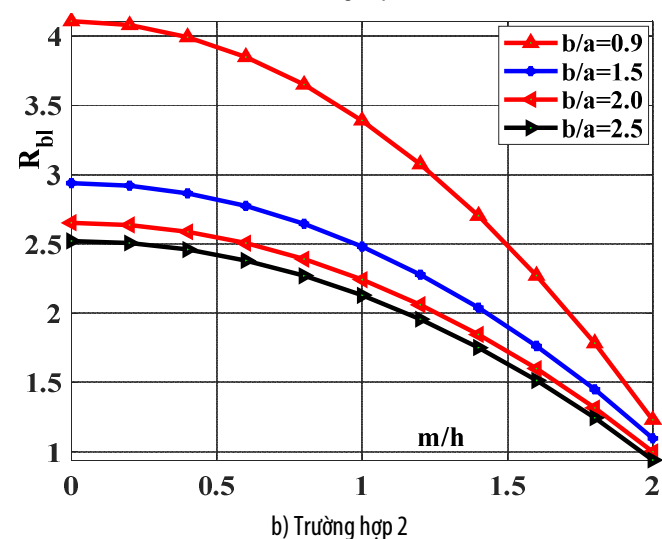
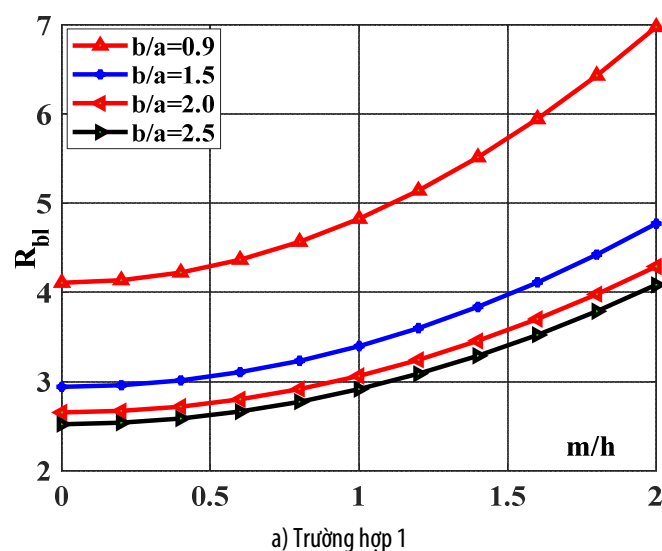
+ Khi m tăng lên, đối với trường hợp 1 thì tải tới hạn tăng lên nhưng trường hợp 2 thì tải tới hạn giảm xuống. Điều này là do trường hợp 1 làm độ cứng của tấm tăng lên còn trường hợp 2 thì độ cứng của tấm giảm xuống khi tham số m tăng lên.



a) Trường hợp 1

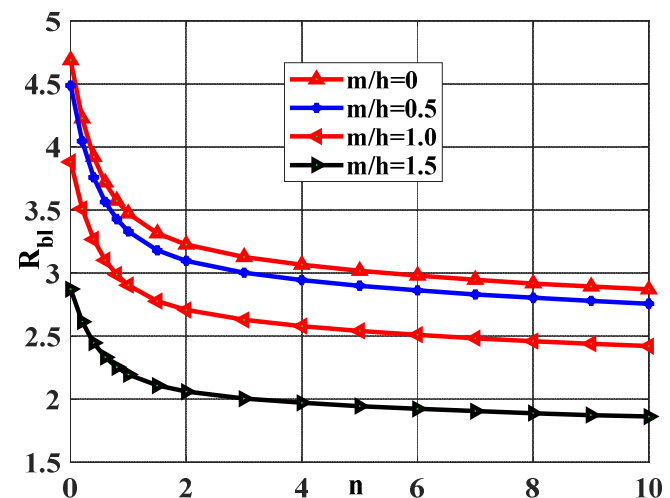
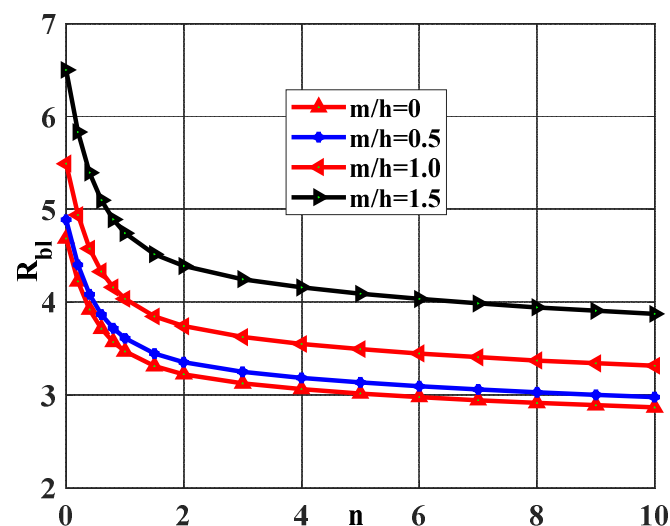


Hình 2. Tải tới hạn của tấm nano phụ thuộc vào chiều dày tấm, $b/a = 1$, $n = 0,5$



Hình 3. Tải tới hạn của tấm nano phụ thuộc vào tỷ lệ chiều dài hai cạnh tấm, $a/h = 10$, $n = 0,5$

Để xem xét ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dài hai cạnh tấm, thay đổi chiều dài cạnh b sao cho tỷ lệ b/a tăng dần từ 0,9 đến 2,5, kết quả tính toán tải tới hạn được chỉ ra như trên hình 3. Khi tỷ lệ chiều dài hai cạnh tấm tăng lên thì tải tới hạn của tấm nano giảm xuống, điều này là do độ cứng của tấm nano giảm xuống. Và khi tỷ lệ chiều dài hai cạnh tấm b/a biến đổi từ 0,9 đến 1,5 thì tải tới hạn thay đổi nhiều. Trường hợp tỷ lệ chiều dài hai cạnh tấm $b/a = 0,9$ thì tải tới hạn biến đổi mạnh nhất khi m thay đổi.



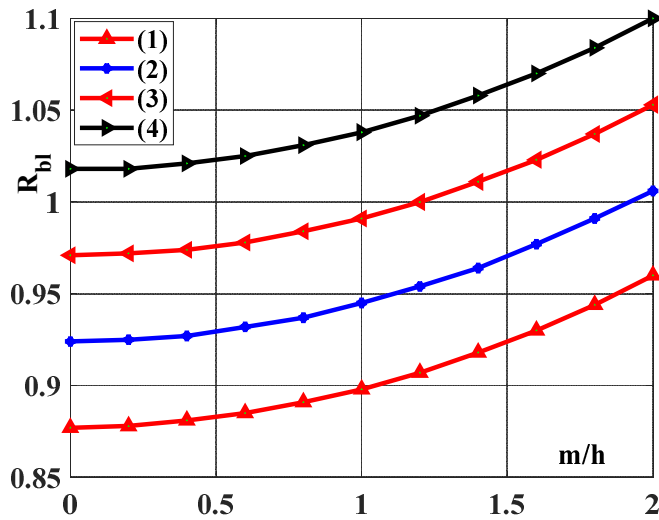
Hình 4. Tải tới hạn của tấm nano phụ thuộc vào n , $a/h = 10$, $a/b = 1$

Trên các hình 4, 5 thể hiện sự phụ thuộc của tải tới hạn đối với số mũ thể tích n và độ cứng của nền đàn hồi, các kết quả này cho thấy:

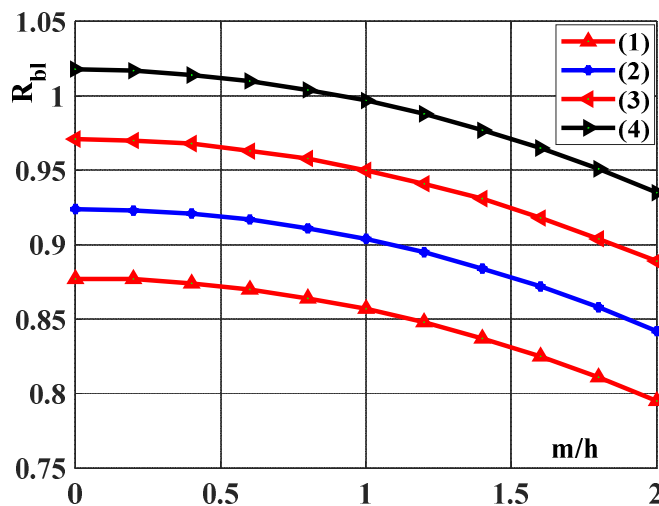
+ Khi tham số mũ thể tích n tăng lên, hàm lượng kim loại trong tấm tăng lên, do đó tấm trở nên mềm hơn, do đó tải tới hạn của tấm nano giảm xuống. Tuy nhiên, mức độ giảm của tải tới hạn thể hiện rõ nhất khi tham số n biến đổi từ 0 đến 2, khi $n > 2$ thì tải tới hạn biến đổi không nhiều.

+ Độ cứng của nền đàn hồi càng lớn thì tải tới hạn của tấm nano càng tăng lên, điều này là do tấm được bổ sung

thêm năng lượng từ nền đàn hồi, tức là độ cứng tổng thể của kết cấu tăng lên khi độ cứng nền tăng, điều này cũng có nghĩa là khả năng chịu nhiệt của tấm nano tốt hơn.



a) Trường hợp 1



b) Trường hợp 2

Hình 5. Tải tối hạn của tấm nano phụ thuộc vào độ cứng $\tilde{K}_1$ của nền đàn hồi, $\tilde{K}_2 = 5$, $a/h = 20$, $a/b = 1$, (1) tương ứng với $\tilde{K}_1 = 0$, (2) tương ứng với $\tilde{K}_1 = 10$, (3) tương ứng với $\tilde{K}_1 = 20$, (4) tương ứng với $\tilde{K}_1 = 30$

5. KẾT LUẬN

Bài báo trình bày phương pháp giải tích để phân tích ổn định nhiệt của tấm nano làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên. Công thức tính toán được xây dựng dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao cải tiến, sự tin cậy của lý thuyết tính toán được kiểm chứng thông qua so sánh với các kết quả đã công bố. Qua các kết quả tính toán, bài báo nhận thấy rằng khi tăng chiều dày và giảm tỷ lệ chiều dài các cạnh tấm thì tải nhiệt tối hạn của tấm nano tăng lên, điều này là do tấm trở nên cứng hơn. Và điều đặc biệt là

khi tấm càng dày thì mức độ ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước càng thể hiện rõ rệt. Tham số tỷ lệ thể tích của vật liệu tăng lên làm giảm tải nhiệt tối hạn của tấm, tức là giảm khả năng chịu nhiệt của tấm nano. Nền đàn hồi làm tăng độ cứng tổng thể của tấm nano, do vậy khả năng chịu tải nhiệt của tấm nano cũng tăng lên. Đây là cơ sở khoa học quan trọng để tính toán và thiết kế các tấm kích thước nano trong thực tế kỹ thuật.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. L. T. Son, C. V. Minh, "Đáp ứng uốn và ổn định của tấm nano chịu nén trên một đoạn chiều dài cạnh," *Tạp chí Khoa học Giao thông Vận tải*, 75, 9, 2289-2302, 2024.
- [2]. P. Q. Phuc, L. V. Nam, P. V. Dong, T. D. Van, "Nghiên cứu đáp ứng uốn tĩnh của tấm nano composite," *Tạp chí Khoa học và Công nghệ Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội*, 61, 9, 98-109, 2025.
- [3]. N. V. Long, T. M. Tu, D. X. Hung, D. X. Trung, "Phân tích ứng xử uốn và ổn định của tấm nano FGM có vi bột rỗng có xét đến ảnh hưởng đồng thời của hiệu ứng phi cục bộ và hiệu ứng bề mặt," *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội*, 18, 2V, 140-156, 2024.
- [4]. T. D. Van, M. C. Van, V. M. Phung, V. N. D. Anh, "Mechanical responses of nanoplates resting on viscoelastic foundations in multi-physical environments," *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 106, 105309, 2024.
- [5]. T. V. Ke, D. V. Thom, N. T. Dung, N. V. Chinh, P. V. Minh, "Galerkin-Vlasov approach for bending analysis of flexoelectric doubly-curved sandwich nanoshells with piezoelectric/FGP/piezoelectric layers using the nonlocal strain theory," *Acta Mechanica Sinica*, 41, 2, 123543, 2025.
- [6]. D. M. Tien, D. V. Thom, N. T. H. Van, A. Tounsi, P. V. Minh, D. N. Mai, "Buckling and forced oscillation of organic nanoplates taking the structural drag coefficient into account," *Computers and Concrete*, 32, 6, 553-565, 2023.
- [7]. M. Sobhy, "Natural frequency and buckling of orthotropic nanoplates resting on two-parameter elastic foundations with various boundary conditions," *Journal of Mechanics*, 30, 443-453, 2014.
- [8]. M. Sobhy, A. F. Radwan, "A new quasi-3D nonlocal plate theory for vibration and buckling of FGM nanoplates," *International Journal of Applied Mechanics*, 9, 1, 1750008, 2017.

AUTHORS INFORMATION

Hoang Xuan Luong¹, Do Ngoc Tien², Bui Xuan Tung²

¹Le Quy Don Technical University, Vietnam

²University of Transport Technology, Vietnam