

NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH CỦA DẦM KÍCH THƯỚC NANO TRONG MÔI TRƯỜNG NHIỆT

BUCKLING ANALYSIS OF NANOBEAMS IN THERMAL ENVIRONMENTS

Nguyễn Thanh Tùng¹, Vũ Hòa Bình^{2,*}

DOI: <https://doi.org/10.57001/huinh5804.2025.387>

TÓM TẮT

Cùng với sự phát triển của khoa học kỹ thuật, các kết cấu có kích thước nano ngày càng được dùng để chế tạo các thiết bị vi cơ điện tử, các cảm biến hiệu suất cao trong các thiết bị công nghệ cao sử dụng trong công nghiệp quốc phòng, công nghiệp bán dẫn. Do vậy, cần có nghiên cứu tổng thể về nhiều khía cạnh khác nhau như vật liệu, tối ưu hình học, công nghệ chế tạo,... trong đó nghiên cứu chỉ ra các đáp ứng cơ học của dầm kích thước nano để phục vụ bài toán thiết kế là một vấn đề có nhiều ý nghĩa thực tiễn. Bài báo này sử dụng phương pháp giải tích và lý thuyết dầm cổ điển để phân tích ổn định tĩnh của dầm kích thước nano trong môi trường nhiệt độ và độ ẩm, trong đó ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước, biến dạng lớn và hiệu ứng flexoelectric cũng được tính đến nhằm làm tăng ý nghĩa khoa học của vấn đề nghiên cứu, đặc biệt là gắn với thực tế làm việc của các kết cấu này trong thực tế. Bài báo cũng chỉ ra ảnh hưởng của một số tham số hình học, vật liệu, môi trường nhiệt ẩm đến tải tới hạn của dầm kích thước nano, đây là những khuyến cáo quan trọng giúp các kỹ sư tham khảo để lựa chọn thông số hợp lý khi thiết kế kết cấu dạng dầm kích thước nano trong thực tế.

Từ khóa: Ổn định, dầm nano; phương pháp giải tích; đàn hồi phi cục bộ; flexoelectric.

ABSTRACT

With the rapid development of science and technology, nanoscale structures are increasingly used in the fabrication of microelectromechanical systems (MEMS) and high-performance sensors in advanced technologies applied in defense and semiconductor industries. Therefore, comprehensive studies on various aspects such as materials, geometric optimization, and manufacturing technologies are essential. Among these, investigating the mechanical responses of nanoscale beams serves as a fundamental basis for design applications, offering significant practical implications. This paper employs an analytical method and classical beam theory to analyze the static stability of nanoscale beams under thermal and moisture environments. The effects of size dependence, large deformation, and the flexoelectric phenomenon are incorporated to enhance the scientific significance of the study and better reflect the actual working conditions of such structures. Furthermore, the paper highlights the influence of several geometric, material, and thermo-hygro parameters on the critical buckling load of nanoscale beams. These findings provide important guidance for engineers in selecting appropriate parameters for the design of nanoscale beam structures in practical applications.

Keywords: Stability, nano beam; analytical method; non-local elasticity; flexoelectric.

¹Viện Công nghệ, Tổng cục Công nghiệp Quốc phòng

²Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội

*Email: hoabinh3010@gmail.com; 2024800023@hau.edu.vn

Ngày nhận bài: 15/6/2025

Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 07/10/2025

Ngày chấp nhận đăng: 28/11/2025

1. GIỚI THIỆU

Trong thực tế, môi trường có nhiệt độ và độ ẩm cao đều ảnh hưởng đến khả năng làm việc của các kết cấu,

điều này là do các đặc trưng cơ tính của vật liệu thay đổi theo nhiệt độ và độ ẩm. Thêm vào đó lực phát sinh do nhiệt độ và độ ẩm làm cho đáp ứng cơ học của các kết

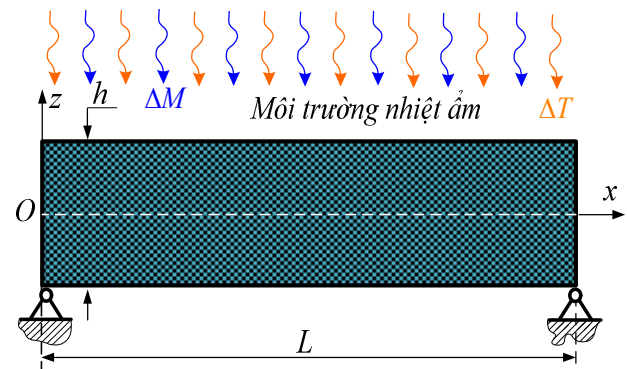
cấu có sự thay đổi đáng kể. Việc nghiên cứu để chỉ ra các đáp ứng này cũng thu hút được sự quan tâm của các nhà khoa học. Hoàn và đồng nghiệp [1] đã chỉ ra ảnh hưởng của môi trường nhiệt độ đến tần số dao động riêng phi tuyến của dầm nano, nghiên cứu được thực hiện nhờ phương pháp trung bình kiểu mới và lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới. Cũng dựa trên lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới, Cường và nhóm nghiên cứu [2] đã phân tích ảnh hưởng của nhiệt độ đến ổn định tĩnh tuyến tính của dầm nano hữu cơ tựa trên nền đàn hồi kiểu mới trên cơ sở của phương pháp Galerkin. Ảnh hưởng của môi trường nhiệt ẩm đến dao động của dầm kích thước nano cũng được Bình và đồng nghiệp chỉ ra trong công trình [3]. Trong bài báo này, các tác giả đã chỉ rõ phổ dao động của dầm nano trong miền tần số khi dầm này chịu kích động ngẫu nhiên, đây là một bài toán khó và có nhiều ý nghĩa, tuy nhiên cũng chưa có nhiều công trình nào đề cập đến vấn đề này, nhưng nhóm tác giả đã giải quyết triệt để.

Để giải quyết bài toán đối với các kết cấu kích thước nano, các lý thuyết tính toán cổ điển không còn phù hợp vì không mô tả đúng bản chất tương tác của các kết cấu này khi ở kích thước cỡ nano. Do vậy, các nhà khoa học phải sử dụng đến một số lý thuyết kiểu mới nhằm làm rõ ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước đến đáp ứng cơ học của các kết cấu này, và một trong những lý thuyết thường được sử dụng trong thực tế là lý thuyết biến thiên biến dạng và lý thuyết đàn hồi phi cục bộ. Dựa trên lý thuyết biến thiên biến dạng Đức và đồng nghiệp [4] đã nghiên cứu ổn định tĩnh của tấm nano có vết nứt và hiệu ứng flexoelectric dựa trên sự kết hợp của phương pháp phần tử hữu hạn và lý thuyết trường pha. Tiến và nhóm nghiên cứu [5] sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và phương pháp giải tích để nghiên cứu chuyển vị uốn và tải tới hạn của tấm nano hữu cơ. Lan và cộng sự [6] áp dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và phương pháp Galerkin kiểu mới để phân tích tải tới hạn của dầm gồm hai lớp vật liệu chịu tải trọng nén. Lý thuyết đàn hồi phi cục bộ cũng được Thọ và đồng nghiệp [7] sử dụng kết hợp với phương pháp giải tích để trình bày nghiên cứu đáp ứng uốn tĩnh của tấm nano nhiều lớp có kể đến ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước. Toan và cộng sự [8] sử dụng lý thuyết biến thiên biến dạng và biến dạng cắt cải tiến kiểu mới để chỉ ra đáp ứng ổn định và tần số dao động của tấm nano tựa trên nền đàn hồi biến đổi. Tiến và nhóm nghiên cứu [9] đã kết hợp cả lý thuyết đàn hồi phi cục bộ, phương pháp giải tích và phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích chuyển vị uốn và tần số dao động riêng của tấm nano hữu cơ.

Từ các công trình nghiên cứu đã công bố, việc nghiên cứu ổn định của dầm kích thước nano trong môi trường nhiệt ẩm, kể đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric, biến dạng lớn và là vấn đề có nhiều ý nghĩa thực tiễn nhưng chưa được chỉ ra trong công trình nào, vì vậy bài báo sử dụng lời giải chính xác để tìm ra lời giải đối với bài toán này, các công thức tính toán được thiết lập từ lý thuyết dầm cổ điển, giúp các nhà khoa học hiểu rõ hơn bản chất của các đáp ứng của dầm kích thước nano trong môi trường nhiệt ẩm, đồng thời cũng hỗ trợ bài toán thiết kế trong thực tế.

2. MÔ HÌNH BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

Dầm đặt trong môi trường nhiệt ẩm được mô hình và thể hiện như trên hình 1. Chiều dài của dầm là L , mặt cắt ngang dầm có chiều cao là h . Dầm được chế tạo bằng vật liệu áp điện có hiệu ứng flexoelectric, đặt dầm trong hệ trục tọa độ Đề Các Oxz như hình vẽ, trục Ox dọc theo trục dầm và trục Oz vuông góc với trục dầm.



Hình 1. Dầm kích thước nano đặt trong môi trường nhiệt ẩm

Chuyển vị dọc theo trục dầm và chuyển vị vuông góc với trục dầm theo lý thuyết dầm cổ điển có dạng:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = u_0(x, y, 0) - z \frac{\partial w_z(x, y, 0)}{\partial x} \\ u_z(x, y, z) = u_z(x, y, 0) \end{cases} \quad (1)$$

với u_0 là chuyển vị trên trục trung hòa của dầm ($z = 0$) và u_z là chuyển vị vuông góc với trục dầm.

Biến dạng dài của dầm:

$$\epsilon_x = \epsilon_0 + z\epsilon_z \quad (2)$$

trong đó

$$\epsilon_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2; \epsilon_z = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \quad (3)$$

Sự biến thiên của biến dạng được tính theo công thức:

$$\eta_{xxz} = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \quad (4)$$

Dầm kích thước nano, ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước được xem xét trong nghiên cứu này dựa trên lý thuyết đàn hồi phi cục bộ, ứng suất và biến dạng có sự liên hệ:

$$(1 - \Phi_L^2 \nabla_x^2) \sigma_x = E \varepsilon_x - e_{31} V_z \quad (5)$$

$$\Psi_{xxz} = -f_{14} V_z \quad (6)$$

$$P_z = e_{31} \varepsilon_{xx} + \kappa_{33} V_z + f_{14} \eta_{xxz} \quad (7)$$

trong đó, f_{14} là hệ số flexoelectric, tham số κ_{ij} là hệ số điện môi; Ψ_{xxz} là mô men ứng suất; V_z là điện trường và P_z là chuyển vị điện của phát sinh do biến dạng cơ học.

Áp dụng định luật Gauss, ta có:

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

Dầm thỏa mãn điều kiện biên là chuyển vị điện triệt tiêu tại các bề mặt trên và bề mặt dưới của dầm, do vậy ta tìm được biểu thức của điện trường:

$$V_z = -\frac{e_{31}}{\kappa_{33}} \varepsilon_{xx} + \frac{f_{14}}{\kappa_{33}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \frac{e_{31}}{\kappa_{33}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} z + \frac{f_{14}}{\kappa_{33}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \quad (9)$$

Trường nội lực của dầm nano gồm lực dọc (F_x) và mô men (M_x), được tìm ra từ tích phân theo chiều dày của dầm:

$$\begin{aligned} F_x - \Phi_L^2 \nabla_x^2 F_x &= \int_{-h/2}^{h/2} (E \varepsilon_x - e_{31} V_z) dz \\ &= A_0 \varepsilon_0 - \frac{e_{31} f_{14} h}{\kappa_{33}} \varepsilon_z \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} M_x - \Phi_L^2 \nabla_x^2 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} (E \varepsilon_x - e_{31} V_z) z dz \\ &= A_{zz} \varepsilon_z - \frac{e_{31}^2}{\kappa_{33}} \left(\frac{h^3}{12} \right) \varepsilon_z \end{aligned} \quad (11)$$

với các hệ số:

$$\left\{ \begin{matrix} A_0 \\ A_{zz} \end{matrix} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} E \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z^2 \end{matrix} \right\} dz \quad (12)$$

Để thiết lập phương trình cân bằng cho dầm, nghiên cứu này sử dụng nguyên lý công ảo:

$$\delta \Theta_B - \delta \Theta_L = 0 \quad (13)$$

trong đó, $\delta \Theta_B$ là công khả dĩ của dầm do biến dạng, còn $\delta \Theta_L$ là công khả dĩ của lực tác dụng lên dầm nano, chúng có biểu thức cụ thể:

$$\delta \Theta_B = \int_{-h/2}^{h/2} \int_S (\sigma_x \delta(\varepsilon_x) + \Psi_{xxz} \delta \eta_{xxz}) dz dS \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &= \int_S (F_x \delta \varepsilon_0 + M_x \delta \varepsilon_z + T_{xxz} \delta \eta_b) dS \\ &= \int_S \left(N_x \left(\delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right) - M_x \delta \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) - T_{xxz} \delta \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \right) dS \\ &= \int_S \left(\delta \frac{\partial F_x}{\partial x} \delta u_0 + \frac{\partial}{\partial x} \left(F_x \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \delta w_z - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta u_z - \frac{\partial^2 T_{xxz}}{\partial x^2} \delta u_z \right) dS \end{aligned}$$

trong đó:

$$T_{xxz} = \int_{-h/2}^{h/2} \Psi_{xxz} dz = -A_{Tb} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}; A_{Tb} = \frac{h f_{14}^2}{\kappa_{33}} \quad (15)$$

Dầm chịu tác dụng của lực nén dọc theo trục dầm F_n , đồng thời môi trường nhiệt ẩm cũng tạo ra lực phát sinh do nhiệt và lực phát sinh do độ ẩm, do vậy tổng công khả dĩ của các ngoại lực này có dạng:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_L &= \int_S F_n \frac{\partial u_z}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dS \\ &+ \int_S F_M \frac{\partial u_z}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dS + \int_S F_T \frac{\partial u_z}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dS \end{aligned} \quad (16)$$

với F_M và F_T là lực phát sinh do độ ẩm và nhiệt độ:

$$\begin{aligned} F_M &= \int_{-h/2}^{h/2} E \beta \Delta M dz \\ F_T &= \int_{-h/2}^{h/2} E \alpha \Delta T dz \end{aligned} \quad (17)$$

với α và β lần lượt là hệ số giãn nở nhiệt và hệ số giãn nở vì độ ẩm của vật liệu, ΔT và ΔM lần lượt là độ chênh lệch nhiệt độ môi trường so với nhiệt độ không phát sinh ứng suất độ chênh độ ẩm của môi trường so với độ ẩm không phát sinh ứng suất của vật liệu.

Thay các biểu thức (14)-(17) vào phương trình (13), ta có hệ phương trình:

$$\delta u_0 : \frac{\partial F_x}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

$$\delta u_z : N_x \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T_{xxz}}{\partial x^2} - (F_n + F_M + F_T) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0 \quad (19)$$

Lúc này, lực dọc trục dầm được suy ra từ biểu thức (5) có dạng:

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{-h/2}^{h/2} (E \varepsilon_x - e_{31} V_z) dz = A_0 \varepsilon_0 - \frac{e_{31} f_{14} h}{\kappa_{33}} \varepsilon_z \\ &= A_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{e_{31} f_{14} h}{\kappa_{33}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (20)$$

Với dầm có hai đầu tựa đơn, điều kiện biên tại hai đầu dầm $u_0(x=0) = u_0(x=L) = 0$, lúc này biểu thức (20) dẫn đến:

$$F_x = \frac{A_0}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{e_{31} f_{14} h}{\kappa_{33} L} \int_0^L \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} dx \quad (21)$$

Sau khi biến đổi, ta tìm được phương trình cân bằng cho dầm nano trong môi trường nhiệt độ và độ ẩm, có tính đến hiệu ứng kích thước và hiệu ứng flexoelectric:

$$\begin{aligned} (F_x - F_n - F_M - F_T) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \Phi_L^2 (F_x - F_n - F_M - F_T) \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} \\ - \frac{\partial^2 T_{xxz}}{\partial x^2} + \Phi_L^2 \frac{\partial^4 T_{xxz}}{\partial x^4} + \left(A_{zz} - \frac{e_{31}^2 h^3}{\kappa_{33} 12} \right) \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Thay biểu thức của F_x từ (20) vào phương trình (22), phương trình cân bằng của dầm nano trong môi trường nhiệt ẩm có dạng:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_0}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{e_{31} f_{14} h}{\kappa_{33} L} \int_0^L \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} dx \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \\ - \Phi_L^2 \left(\frac{A_0}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{e_{31} f_{14} h}{\kappa_{33} L} \int_0^L \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} dx \right) \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} \\ + A_{TB} \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} - \Phi_L^2 \left(A_{TB} \frac{\partial^6 u_z}{\partial x^6} \right) + \left(A_{zz} - \frac{e_{31}^2 h^3}{\kappa_{33} 12} \right) \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Giải phương trình (23), ta sẽ thu được tải tới hạn F_n gây mất ổn định cho dầm nano trong môi trường nhiệt ẩm. Nghiên cứu này sử dụng phương pháp giải tích để chỉ rõ biểu thức cụ thể của tải F_n , để làm được điều này, ta sử dụng dạng nghiệm của chuyển vị ở chuỗi lượng giác như sau:

$$u_z = U_{0z} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (24)$$

trong đó, U_{0z} là biên độ của chuyển vị u_z .

Kết hợp (24) và (23), ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_0}{4} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 U_{0z}^2 - \frac{e_{31} f_{14} h}{\kappa_{33} L} \left(\frac{\pi}{L} \right) U_{0z} \right) \\ - \Phi_L^2 \left(\frac{A_0}{4} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 U_{0z}^2 - \frac{2e_{31} f_{14} h}{\kappa_{33} L} \left(\frac{\pi}{L} \right) U_{0z} \right) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \\ + A_{TB} \left[1 - \Phi_L^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right] \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + \left(A_{zz} - \frac{e_{31}^2 h^3}{\kappa_{33} 12} \right) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Giải phương trình (25), ta thu được biểu thức tải tới hạn của dầm nano trong môi trường nhiệt ẩm

$$F_n = \frac{1}{\left(1 + \Phi_L^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right)} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{A_0 \pi^2}{4L^2} U_{0z}^2 \right) \\ & \left(1 + \Phi_L^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right) \left(\frac{2e_{31} f_{14} h}{\kappa_{33} L^2} \pi U_{0z} \right) \\ & - F_M - F_T \end{aligned} \right] \quad (26)$$

Biểu thức (26) chính là công thức tính tải tới hạn của dầm nano đặt trong môi trường nhiệt ẩm, có kể đến ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước và hiệu ứng flexoelectric.

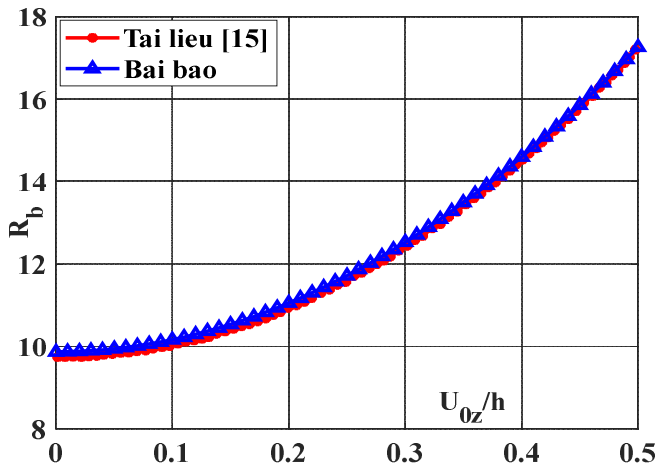
3. KIỂM TRA SỰ TIN CẬY CỦA LỜI GIẢI

Ví dụ so sánh 1: Dầm kích thước nano có chiều dài $L = 10\text{nm}$, chiều dày của dầm là h với giá trị của tỷ lệ L/h biến đổi từ 10 đến 100, cơ tính vật liệu $E = 30\text{MPa}$, $\nu = 0,3$. Dầm nano chịu tác dụng của tải trọng nén dọc theo trục dầm, bảng 1 liệt kê kết quả so sánh tải tới hạn của dầm được tìm ra bằng các phương pháp tính toán khác nhau, trong đó tài liệu [10-12] tính toán dựa trên lời giải chính xác và tài liệu [13] tính toán bằng phương pháp số. Sự tương đồng giữa kết quả của nghiên cứu này với các kết quả đã công bố chứng tỏ sự hợp lý và tin cậy của lý thuyết tính toán được trình bày ở phần trên.

Bảng 1. So sánh tải tới hạn của dầm nano với nhiều giá trị khác nhau của chiều dày

L/h	Tài liệu	Φ_L (nm)			
		0	1	2	3
100	Tài liệu [10]	9,86	8,98	8,24	7,61
	Tài liệu [11]	9,86	8,98	8,24	7,61
	Tài liệu [12]	-	-	-	-
	Tài liệu [13]	-	-	-	-
	Bài báo	9,89	9,01	8,26	7,63
20	Tài liệu [10]	9,85	8,97	8,23	7,60
	Tài liệu [11]	9,86	8,98	8,24	7,61
	Tài liệu [12]	9,80	9,57	9,34	9,13
	Tài liệu [13]	9,86	8,98	8,24	7,61
	Bài báo	9,89	9,01	8,26	7,63
10	Tài liệu [10]	9,81	8,93	8,20	7,58
	Tài liệu [11]	9,86	8,98	8,24	7,61
	Tài liệu [12]	9,62	8,75	8,03	7,42
	Tài liệu [13]	-	-	-	-
	Bài báo	9,89	9,01	8,26	7,63

Ví dụ so sánh 2: Xét dầm chịu biến dạng lớn, dầm có chiều dài là L và tỷ lệ $L/h = 20$. Kết quả tính toán và so sánh giữa lời giải của nghiên cứu này so với kết quả của lời giải chính xác trong tài liệu [14] được vẽ như trên hình 2. Sự bám sát của hai đường cong chứng tỏ kết quả của nghiên cứu này rất gần với kết quả đã công bố trong tài liệu [14], điều này một lần nữa chứng minh sự tin cậy của nghiên cứu này.



Hình 2. So sánh tải tới hạn của dầm khi có biến dạng lớn

4. KẾT QUẢ SỐ VÀ THẢO LUẬN

Phần này tính toán tải tới hạn của dầm kích thước nano có tham số hình học $L = 10\text{nm}$, chiều cao mặt cắt ngang là h với tỷ lệ L/h biến đổi từ 20 đến 100. Dầm được làm bằng vật liệu có hiệu ứng flexoelectric với tham số vật liệu: $E = 102\text{GPa}$; $\nu = 0,3$; $e_{31} = -17,05\text{C/m}^2$; $k_{33} = 1,76 \cdot 10^{-8}\text{C/(Vm)}$; $\alpha = 9,6384 \cdot 10^{-6}\text{K}^{-1}$; $\beta = 10^{-3}(\%\text{H}_2\text{O})^{-1}$, tham số f_{14} và có giá trị biến đổi từ 0 đến $1,2 \cdot 10^{-8}\text{C/m}$. Tải tới hạn của dầm được tính toán theo công thức:

$$R_b = \frac{12L^2}{Eh_0^3} F_n \quad (36)$$

Sự phụ thuộc của tải tới hạn biến đổi theo biên độ U_{0z} và tham số đàn hồi phi cực bộ được chỉ ra như trên hình 3, ta rút ra một số nhận xét:

+ Biên độ U_{0z} của dao động càng lớn thì tải tới hạn của dầm nano càng lớn, và sự phụ thuộc của tải tới hạn theo biên độ là đường cong phi tuyến. Đường cong phi tuyến càng thể hiện rõ tính phi tuyến khi $f_{14} = 0$ và trong trường hợp $f_{14} = 1 \cdot 10^{-8}\text{C/m}$ thì đường cong thể hiện tính phi tuyến kém hơn, điều này là do dầm nano càng cứng hơn khi có hiệu ứng flexoelectric.

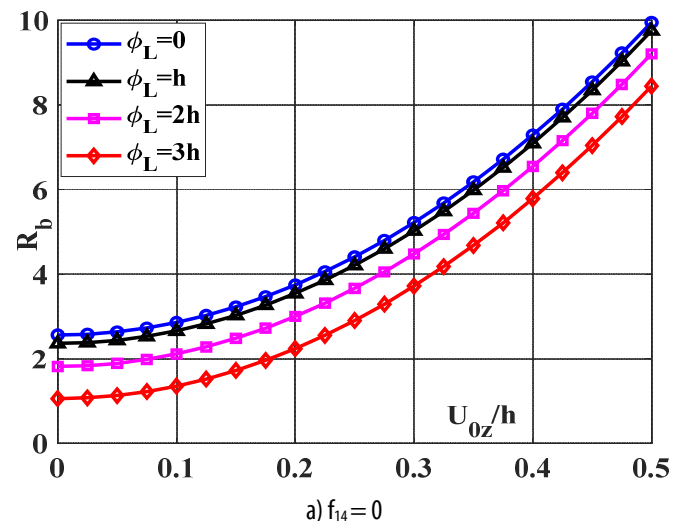
+ Khi $f_{14} > 0$ (tức là tính đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric), tải tới hạn của dầm nano tăng lên, tức là hiệu ứng flexoelectric làm cho dầm nano có khả năng chịu tải tốt hơn.

+ Giá trị của tham số đàn hồi phi cực bộ tăng lên thì tải tới hạn của dầm nano giảm xuống, điều này là do khoảng cách giữa các phân tử tăng lên, và do đó làm cho độ cứng của dầm nano giảm xuống.

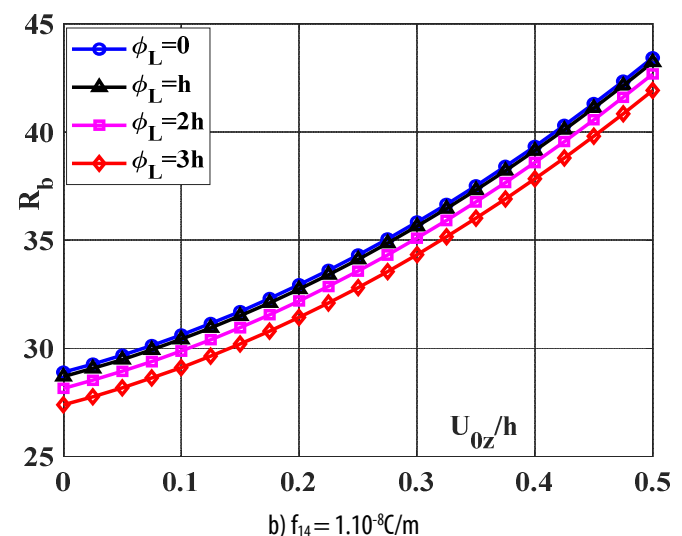
Trên hình 4 ÷ 6 thể hiện kết quả tính toán tải tới hạn của dầm nano phụ thuộc vào nhiệt độ, tham số f_{14} và chiều dày h , các nhận xét thu được từ các kết quả này như sau:

+ Khi nhiệt độ môi trường tăng lên, tải tới hạn của dầm nano giảm xuống, điều này có nghĩa là nhiệt độ góp phần làm khả năng chịu tải nén của dầm giảm xuống.

+ Hệ số f_{14} càng lớn thì tải tới hạn của dầm nano càng lớn. Chiều dày của dầm nano càng nhỏ thì tải tới hạn của dầm càng bé, điều này là do độ cứng của dầm càng giảm khi dầm càng mảnh. Thêm vào đó, dầm càng dày thì mức độ phi tuyến của tải tới hạn phụ thuộc vào biên độ U_{0z} càng thể hiện rõ ràng.

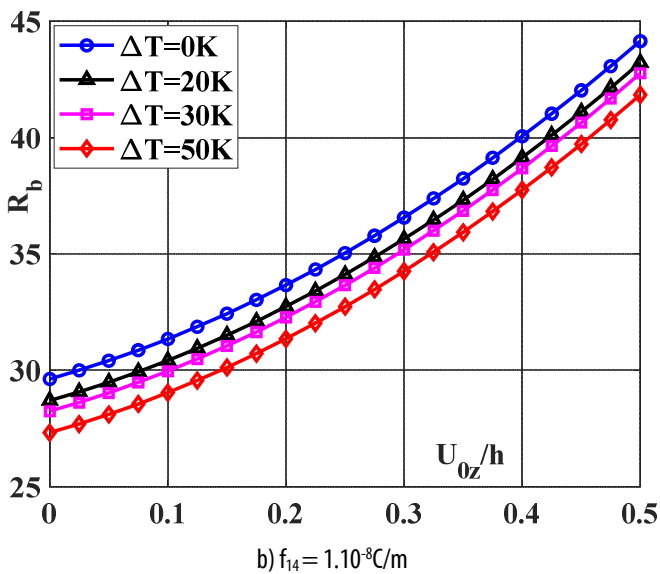
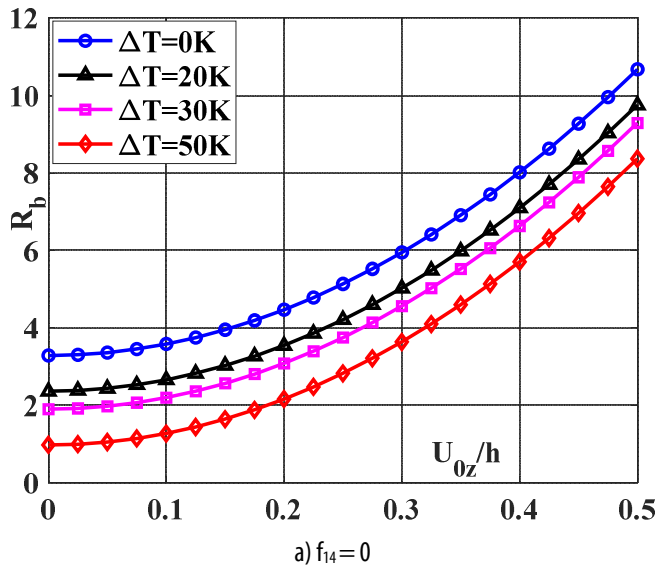


a) $f_{14} = 0$

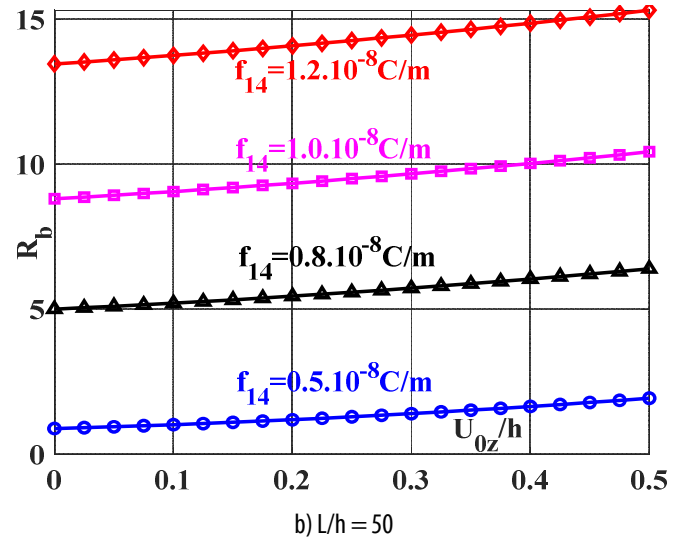
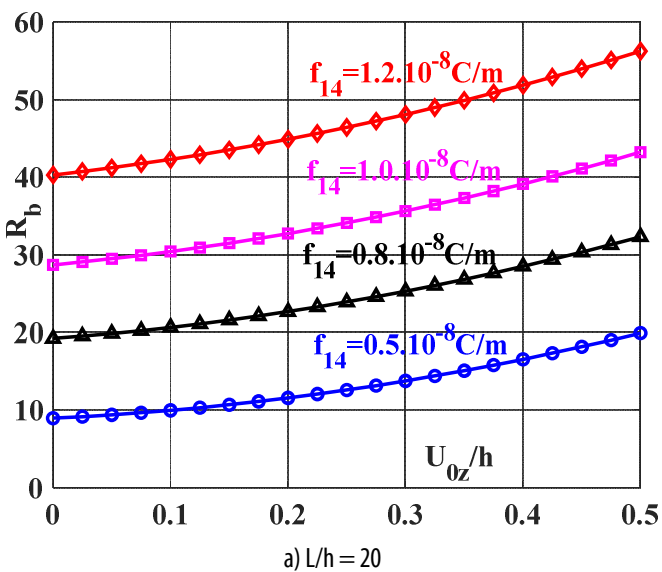


b) $f_{14} = 1 \cdot 10^{-8}\text{C/m}$

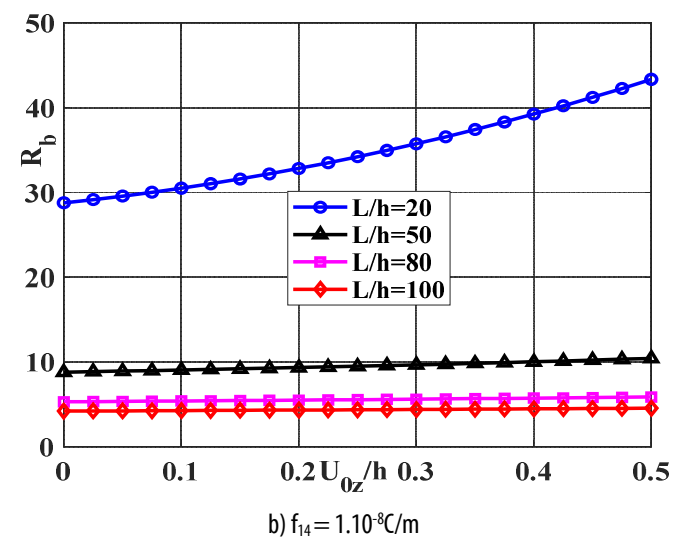
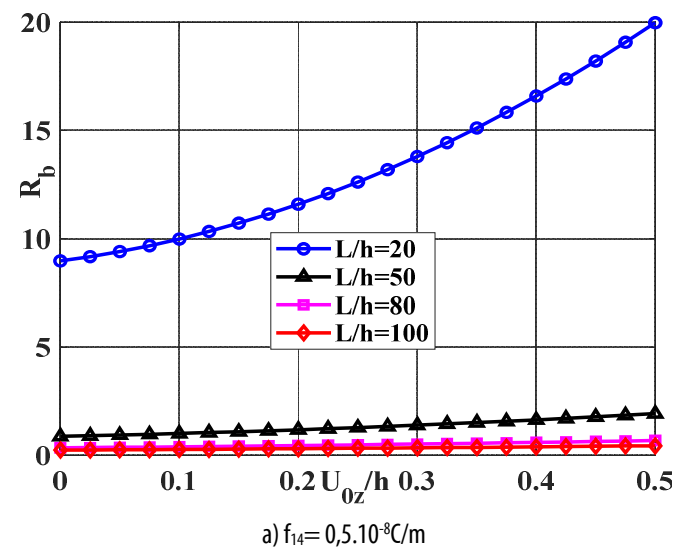
Hình 3. Tải tới hạn thay đổi theo các giá trị của Φ_L và tỷ lệ U_{0z}/h , $L/h = 20$, $\Delta T = 20\text{K}$, $\Delta M = 1(\%\text{H}_2\text{O})$



Hình 4. Tải tối hạn thay đổi theo các giá trị của nhiệt độ và tỷ lệ U_{0z}/h , $L/h = 20$, $\Phi_L = h$, $\Delta M = 1 (\% \text{H}_2\text{O})$



Hình 5. Tải tối hạn thay đổi theo các giá trị của f_{14} và tỷ lệ U_{0z}/h , $\Phi_L = h$, $\Delta T = 20\text{K}$, $\Delta M = 1 (\% \text{H}_2\text{O})$



Hình 6. Tải tối hạn thay đổi theo các giá trị của f_{14} và tỷ lệ U_{0z}/h , $\Phi_L = h$, $\Delta T = 20\text{K}$, $\Delta M = 1 (\% \text{H}_2\text{O})$

5. KẾT LUẬN

Bài báo đã sử dụng lý thuyết dầm cổ điển để xây dựng biểu thức tính toán và phương trình cân bằng cho dầm kích thước nano trong môi trường nhiệt ẩm. Phương pháp giải tích đã được áp dụng để tìm lời giải cho bài toán ổn định phi tuyến của dầm nano, trong đó hiệu ứng kích thước, hiệu ứng flexoelectric và chuyển vị lớn cũng được tính đến. Biểu thức tải tới hạn phụ thuộc vào biên độ dao động đã được chỉ ra cụ thể, điều này tạo điều kiện thuận lợi cho việc khảo sát số để thấy rõ ảnh hưởng của các tham số hình học, vật liệu đến tải tới hạn của dầm nano, đồng thời giúp các nhà khoa học hiểu rõ hơn bản chất đáp ứng ổn định của dầm này, đặc biệt là hiệu ứng flexoelectric và nhiệt độ tác dụng đồng thời đến dầm nano. Các kết quả nghiên cứu này là tiền đề để các nhà khoa học tiếp tục khám phá ảnh hưởng của nhiệt độ đến đáp ứng ổn định động của kết cấu dầm kích thước nano, đồng thời giúp các nhà thiết kế có cơ sở tham khảo để lựa chọn hợp lý đối với các thông số vật liệu, kích thước dầm để có thể làm việc được trong môi trường nhiệt độ cho trước.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. P. V. Hoan, D. A. Nguyen, V. T. Do, V. M. Phung, "Nonlinear vibration of nanobeams in thermal environment," *Mech. Based Design Struct. Mach.*, 2025. doi:10.1080/15397734.2025.2472253.
- [2]. D.T.M. Cuong, D.V. Thom, N.V. Dung, "Effect of novel elastic foundations on the thermal buckling behavior of organic nanobeams," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1-26, 2025. doi:10.1080/15397734.2025.2556241.
- [3]. V.H. Binh, N.D. Anh, D.V. Thom, P. V. Minh, H.T. Dung, "Vibration response of nanobeams subjected to random reactions," *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 105489, 2025. doi: 10.1016/j.euromechsol.2024.105489.
- [4]. D.H. Duc, D.V. Thom, P.M. Phuc, "Buckling analysis of variable thickness cracked nanoplates considering the flexoelectric effect," *Transp. Comm. Science J.*, 73, 5, 470-485, 2022. doi: 10.47869/tcsj.73.5.3.
- [5]. D. M. Tien, D. V. Thom, P. V. Minh, P. H. Hieu, "Bending and buckling responses of organic nanoplates considering the size effect," *Transp. Comm. Science J.*, 75, 7, 2015-2029, 2024. doi: 10.47869/tcsj.75.7.1
- [6]. D.M. Lan, N.D. Anh, P.V. Dong, D.V. Thom, Ö. Civalek, P.V. Minh, "A new Galerkin method for buckling of sandwich nanobeams," *Proc. Inst. Mech. Engineers, Part C: J. Mech. Eng. Science*, 239, 8, 3034-3051, 2024. doi:10.1177/09544062241304233.
- [7]. N.C. Tho, D.M. Tien, D.V. Thom, P.V. Minh, D.V. Doan, "A new approach to the static bending problem of organic nanoplates," *Proc. Inst.*

Mech. Eng., Part C: J. Mech. Eng. Science, 239, 8, 3052-3064, 2024. doi:10.1177/09544062241306986.

[8]. T. V. Toan, T. H. H. Truong, V. D. Dao, "Vibration and buckling analysis of nanoplates resting on variable elastic foundations," *Transp. Comm. Science J.*, 75, 9, 2238-2251, 2024. doi: 10.47869/tcsj.75.9.1

[9]. D. M. Tien, D. V. Thom, P. V. Minh, N. C. Tho, T. N. Doan, D. N. Mai, "The application of the nonlocal theory and various shear strain theories for bending and free vibration analysis of organic nanoplates," *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 2023. doi: 10.1080/15397734.2023.2186893

[10]. B. Van Tuyen, G. T. Luu, "Static Buckling Analysis of FG Sandwich Nanobeams," *J. Vib. Eng. Technol.*, 2023. doi: 10.1007/s42417-023-01081-6.

[11]. J. N. Reddy, "Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams," *Int. J. Eng. Sci.*, 45, 2-8, 288-307, 2007. doi: 10.1016/j.ijengsci.2007.04.004.

[12]. M. Aydogdu, "A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending, buckling and vibration," *Phys. E Low-Dimensional Syst. Nanostructures*, 41, 9, 1651-1655, 2009. doi: 10.1016/j.physe.2009.05.014.

[13]. M. A. Eltaher, S. A. Emam, F. F. Mahmoud, "Static and stability analysis of nonlocal functionally graded nanobeams," *Compos. Struct.*, 96, 82-88, 2013. doi: 10.1016/j.compstruct.2012.09.030

[14]. S. A. Emam, "A general nonlocal nonlinear model for buckling of nanobeams," *Appl. Math. Model.*, 37, 10-11, 6929-6939, 2013. doi: 10.1016/j.apm.2013.01.043.

AUTHORS INFORMATION

Nguyen Thanh Tung¹, Vu Hoa Binh²

¹Institute of Technology, General Department of Defense Industry, Vietnam

²Hanoi University of Industry, Vietnam