

NGHIÊN CỨU ĐÁP ỨNG UỐN TĨNH CỦA TẤM NANO COMPOSITE

STUDY OF THE STATIC BENDING RESPONSE OF COMPOSITE NANO PLATES

Phan Quang Phúc¹, Lê Văn Nam²,
Phạm Văn Đông¹, Đỗ Văn Thơm^{3,*}

DOI: <https://doi.org/10.57001/huih5804.2025.327>

TÓM TẮT

Các kết cấu composite gồm nhiều lớp vật liệu khác nhau ngày càng được sử dụng rộng rãi trong thực tế, một trong những ưu điểm nổi trội của kết cấu này là tận dụng được điểm mạnh của các vật liệu thành phần, điều này làm tăng khả năng chịu lực của chúng. Bài báo này nghiên cứu đáp ứng uốn tĩnh của tấm composite gồm nhiều lớp vật liệu, trong đó các lớp vật liệu tiếp xúc với nhau theo biên dạng sóng hình sin và sóng hình vuông. Lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới cũng được sử dụng trong bài báo này, đồng thời có tính đến hiệu ứng kích thước nhỏ nhờ lý thuyết đàn hồi phi cục bộ, các biểu thức tính toán và phương trình cân bằng được thiết lập dựa trên nguyên lý di chuyển khả dĩ, phương pháp phần tử hữu hạn với các phần tử bốn điểm nút, mỗi nút sáu bậc tự do được áp dụng để giải quyết bài toán đặt ra. Bài báo này là có tính đến ảnh hưởng của sự không hoàn hảo hình dáng ban đầu với nhiều dạng khác nhau, tấm tựa một phần trên nền đàn hồi có tham số biến đổi theo tọa độ. Các kết quả nghiên cứu từ nghiên cứu này thực sự có giá trị khi thiết kế kết cấu nhiều lớp trong thực tế.

Từ khóa: Uốn tĩnh, phần tử hữu hạn, tấm nano, composite.

ABSTRACT

Engineering applications are increasingly utilizing multilayer composite structures composed of different materials. One of the outstanding advantages of such structures is their ability to combine the strengths of individual constituent materials, thereby enhancing their overall load-carrying capacity. This paper investigates the static bending response of a multilayer composite plate in which the material layers are bonded along interfaces shaped as sinusoidal and square-wave surfaces. A newly developed shear deformation theory is employed, incorporating small-scale effects through the nonlocal elasticity theory. The governing equations and their formulations are derived from the principle of virtual displacements. The study applies the finite element method using four-node elements, each with six degrees of freedom per node, to solve the problem. The study also takes into account the influence of initial geometric imperfections of various forms, as well as the effect of a partially supported elastic foundation whose stiffness varies spatially. The results obtained provide valuable insights and serve as a scientific basis for the practical design of multilayer composite structures.

Keywords: Static bending, finite element, nano sheet, composite.

¹Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội

²Bệnh viện Hữu nghị Việt Đức

³Học viện Kỹ thuật Quân sự

*Email: thom.dovan.mta@gmail.com

Ngày nhận bài: 25/7/2025

Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 29/8/2025

Ngày chấp nhận đăng: 28/9/2025

1. GIỚI THIỆU

Các kết cấu composite đã và đang được sử dụng trong nhiều lĩnh vực quan trọng như hàng không vũ trụ, y tế, quốc phòng,... Điều này có được là do các kết cấu này vừa nhẹ, vừa bền, lại dễ chế tạo. Và để phát huy tối đa khả năng làm việc của các kết cấu này, cần có nghiên cứu toàn diện trên nhiều khía cạnh khác nhau, tuy nhiên

việc tìm ra quy luật ứng xử cơ học của kết cấu composite cũng là vấn đề được các nhà khoa học quan tâm tìm hiểu. Gavallas và cộng sự [1] đã nghiên cứu ảnh hưởng của sự phân bố ngẫu nhiên của vật liệu composite đến đáp ứng uốn của tấm composite trên cơ sở của lý thuyết tấm cổ điển. Đạt và đồng nghiệp [2] sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích dao động riêng của

tấm nhiều lớp làm bằng vật liệu composite có cơ tính biến đổi.

Ngày nay, các tấm composite cỡ micro và nano mét cũng được sử dụng trong các vi mạch điện tử, các sensor cảm ứng có độ nhạy cao. Và với kích thước nhỏ như vậy, cần phải tính đến ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước đến đáp ứng cơ học của các kết cấu này. Bình và nhóm nghiên cứu [3] sử dụng lý thuyết dầm cải tiến và phương pháp giải tích để nghiên cứu dao động tự do và dao động cưỡng bức của dầm nano chịu tải trọng ngẫu nhiên. Phương pháp phần tử hữu hạn kết hợp với lý thuyết trường pha đã được tác giả Doan và cộng sự [4] sử dụng để phân tích ảnh hưởng của vết nứt đến dao động tự do của tấm nano có kể đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric. Tho và đồng nghiệp [5] cũng sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để trình bày đáp ứng động lực học của tấm nano có kể đến hiệu ứng flexomagnetic. Ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước đến đáp ứng uốn tĩnh và ổn định tĩnh của tấm nano hữu cơ nhiều lớp đã được Tien và cộng sự [6] chỉ ra, trong đó phần tử bốn nút đã được sử dụng một cách rất hiệu quả. Ngoài ra, nhiều kết quả tính toán thú vị về tính toán các kết cấu nano cũng được chỉ ra trong các công trình [7-12].

Từ các nghiên cứu đã có, người ta thấy rằng việc nghiên cứu tìm ra đáp ứng uốn tĩnh của tấm composite nhiều lớp với các lớp liên kết với nhau bởi biên dạng không đồng nhất là chưa được đề cập đến, ý tưởng về biên dạng liên kết bề mặt giữa các lớp này sẽ làm tăng hiệu quả sử dụng chúng trong quá trình chịu lực. Do vậy bài báo này sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để giải quyết bài toán uốn tĩnh của tấm nano composite tựa một phần trên nền đàn hồi và cung cấp nhiều kết quả thú vị về chuyển vị của tấm này.

2. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN UỐN CỦA TẤM NANO COMPOSITE

Tấm nano composite được mô tả như trên hình 1. Hai cạnh tấm là a và b, tấm có chiều dày là h, tấm gồm hai lớp vật liệu với chiều dày mỗi lớp tương ứng là h_i ($i = 1-2$), biên dạng tiếp xúc giữa hai lớp có dạng sóng hình sin và hình vuông theo biểu thức:

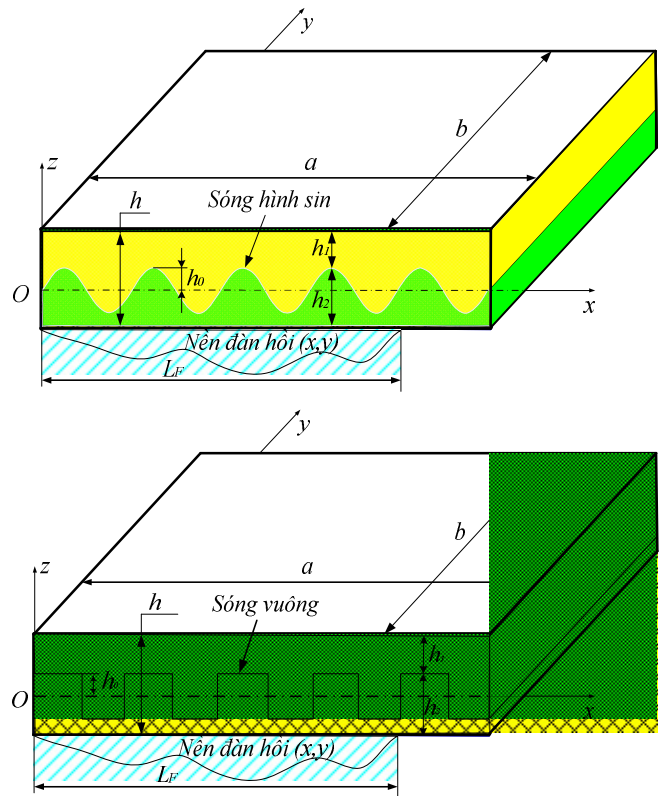
Trường hợp hai lớp tiếp xúc theo biên dạng sóng hình sin:

$$h_x = h_0 \sin \alpha_s x \tag{1}$$

Trường hợp hai lớp tiếp xúc theo biên dạng sóng hình vuông:

$$h_x = \begin{cases} h_0 & : \sin(\alpha_s x) \geq 0 \\ -h_0 & : \sin(\alpha_s x) \leq 0 \end{cases} \tag{2}$$

trong đó, $\alpha_s = \frac{2\pi N}{L}$, N là số bước sóng, h_0 là biên độ của sóng.



Hình 1. Mô hình tấm nano composite với các thông số hình học

Các lớp của tấm được chế tạo từ vật liệu có lỗ rỗng với thể tích lỗ rỗng có dạng:

$$V_r^{(i)} = V_{or} \left\{ 1 - I_0 + \frac{\pi I_0}{2} \cos(\pi z / h_i) \right\} \tag{3}$$

với $V_r^{(i)}$ là tỷ lệ thể tích lỗ rỗng trong lớp thứ i, I_0 là hệ số thể hiện sự phân bố của lỗ rỗng của vật liệu.

Các đặc trưng cơ tính vật liệu trong mỗi lớp phụ thuộc vào tọa độ chiều dày có dạng:

$$E^{(i)}(z) = E_0^{(i)} (1 - V_m^{(i)}) \tag{4}$$

với $E_0^{(i)}$ là mô đun đàn hồi của lớp thứ i, hệ số Poát xng trong hai lớp được xem như bằng nhau $\nu^{(1)} = \nu^{(2)}$.

Tấm có hai lớp làm từ hai vật liệu khác nhau, do vậy cần thiết lập biểu thức tính toán đối với mặt trung hòa của tấm, trong trường hợp này thì mặt trung hòa lệch khỏi mặt trung bình của tấm một khoảng cách như sau:

$$z_d = \frac{\int_{-h_2}^{h_x} E^{(2)}(z) z dz + \int_{h_x}^{h_1} E^{(1)}(z) z dz}{\int_{-h_2}^{h_x} E^{(2)}(z) dz + \int_{h_x}^{h_1} E^{(1)}(z) dz} \tag{5}$$

Bài báo giải quyết bài toán đặt ra bằng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba, theo đó các chuyển vị theo các trục tọa độ Ox, Oy and Oz có dạng:

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = -(z - z_b) \frac{\partial w_{3b}}{\partial x} - t_z \frac{\partial w_{3s}}{\partial x} \\ v_2(x, y, z) = -(z - z_b) \frac{\partial w_{3b}}{\partial y} - t_z \frac{\partial w_{3s}}{\partial y} \\ w_3(x, y, z) = w_{3b} + w_{3s} \end{cases} \quad (6)$$

trong đó, u_1, v_2 and w_3 là chuyển vị theo phương trục x, y và z. Hàm t_z có hai dạng như sau:

$$t_z(z) = (z - z_b) - \frac{(z - z_b)}{1 + \frac{16}{7h^2} \left(\frac{(z - z_b)^4}{h^2} + (z - z_b)^2 \right)} \quad (7)$$

Đạo hàm các thành phần trong biểu thức (6) theo các biến tương ứng, các thành phần biến dạng thu được:

$$\begin{cases} c_x = (z - z_b) c_{zx} + t_z c_{rx} + c_{ximp} \\ c_y = (z - z_b) c_{zy} + t_z c_{ry} + c_{yimp} \\ c_{xy} = (z - z_b) c_{zxy} + t_z c_{rxy} + c_{xyimp} \\ c_{xz} = g_z c_{sxz} \\ c_{yz} = g_z c_{syz} \end{cases} \quad (8)$$

với các biến dạng:

$$\begin{aligned} c_{zx} &= -\frac{\partial^2 w_{3b}}{\partial x^2}; c_{rx} = -\frac{\partial^2 w_{3s}}{\partial x^2}; \\ c_{ximp} &= \frac{\partial w_{3imp}}{\partial x} \frac{\partial (w_{3b} + w_{3s})}{\partial x} \\ c_{zy} &= -\frac{\partial^2 w_{3b}}{\partial y^2}; c_{ry} = -\frac{\partial^2 w_{3s}}{\partial y^2}; \\ c_{yimp} &= \frac{\partial w_{3imp}}{\partial y} \frac{\partial (w_{3b} + w_{3s})}{\partial y} \\ c_{zxy} &= -2 \frac{\partial^2 w_{3b}}{\partial x \partial y}; c_{rxy} = -2 \frac{\partial^2 w_{3s}}{\partial x \partial y}; \\ c_{xyimp} &= \frac{\partial w_{3imp}}{\partial y} \frac{\partial (w_{3b} + w_{3s})}{\partial x} + \frac{\partial w_{3imp}}{\partial x} \frac{\partial (w_{3b} + w_{3s})}{\partial y} \\ c_{sxz} &= \frac{\partial w_{3s}}{\partial x}; c_{syz} = \frac{\partial w_{3s}}{\partial y}; g_z = 1 - \frac{\partial t_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (9)$$

với $c_{ximp}, c_{yimp}, c_{xyimp}$ là các thành phần biến dạng tương ứng với sự không hoàn hảo của hình dáng ban đầu, sự không hoàn hảo này được thể hiện thông qua tham số w_{3imp} , quy luật biến đổi của thành phần này có dạng:

$$w_{zim} = p_{im} \operatorname{hsech} \left[\delta_1 \left(\frac{x}{a} - \psi_1 \right) \right] \cos \left[\mu_1 \left(\frac{x}{a} - \psi_1 \right) \right] \times \operatorname{sech} \left[\delta_2 \left(\frac{y}{b} - \psi_2 \right) \right] \cos \left[\mu_2 \left(\frac{y}{b} - \psi_2 \right) \right] \quad (10)$$

trong đó, p_{im} là biên độ của sự không hoàn hảo, các tham số $\delta_1, \psi_1, \mu_1, \delta_2, \psi_2,$ và μ_2 thể hiện mức độ không hoàn hảo của hình dáng ban đầu, từ dạng không hoàn hảo mang tính toàn cục đến dạng không hoàn hảo mang tính cục bộ trên một vùng nào đó. Dưới đây là một số trường hợp:

- Dạng hàm điều hòa (ký hiệu là ĐH):

$$\delta_1=0; \mu_1=1; \psi_1=0,5; \delta_2=0; \mu_2=1; \psi_2=0,5$$

- Dạng toàn cục 1 (ký hiệu là TC1):

$$\delta_1=0; \mu_1=3; \psi_1=0,5; \delta_2=0; \mu_2=3; \psi_2=0,5$$

- Dạng toàn cục 2 (ký hiệu là TC2):

$$\delta_1=0; \mu_1=5; \psi_1=0,5; \delta_2=0; \mu_2=5; \psi_2=0,5$$

- Dạng toàn cục 3 (ký hiệu là TC3):

$$\delta_1=0; \mu_1=7; \psi_1=0,5; \delta_2=0; \mu_2=7; \psi_2=0,5$$

- Dạng cục bộ 1 (ký hiệu là CB1):

$$\delta_1=15; \mu_1=2; \psi_1=0,25; \delta_2=0; \mu_2=1; \psi_2=0,5$$

- Dạng cục bộ 2 (ký hiệu là CB2):

$$\delta_1=15; \mu_1=2; \psi_1=0,5; \delta_2=0; \mu_2=1; \psi_2=0,5$$

- Dạng cục bộ 3 (ký hiệu là CB3):

$$\delta_1=15; \mu_1=2; \psi_1=0,5; \delta_2=0; \mu_2=3; \psi_2=0,5$$

- Dạng cục bộ 4 (ký hiệu là CB4):

$$\delta_1=15; \mu_1=2; \psi_1=0,5; \delta_2=0; \mu_2=5; \psi_2=0,5$$

- Dạng cục bộ 5 (ký hiệu là CB5):

$$\delta_1=15; \mu_1=2; \psi_1=0,5; \delta_2=0; \mu_2=7; \psi_2=0,5$$

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trong lớp thứ i được viết ở dạng:

$$\begin{aligned} (1 - \mu_L^2 \nabla^2) \boldsymbol{\sigma}_x^{(i)} &= \mathbf{C}^{(i)} \left((z - z_b) c_z^{(i)} + t_z c_r^{(i)} + c_{imp}^{(i)} \right) \\ (1 - \mu_L^2 \nabla^2) \boldsymbol{\tau}^{(i)} &= \mathbf{G}^{(i)} c_s^{(i)} \end{aligned} \quad (11)$$

với μ_L là tham số phi cục bộ, $\nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}$ là toán tử Laplace, $\boldsymbol{\sigma}_x^{(i)}$ và $\boldsymbol{\tau}_{xz}^{(i)}$ là ứng suất pháp và ứng suất tiếp; $v^{(i)}$ và $E^{(i)}$ là hệ số Poát xông và mô đun đàn hồi,

$$\mathbf{G}^{(i)} = \frac{E^{(i)}}{2(1 + v^{(i)})} \begin{bmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{bmatrix}$$

Biểu thức (12) được khai triển cụ thể hơn:

$$\begin{aligned}
 (1-\mu_L^2 \nabla_x^2) \sigma_x^{(i)} &= (z-z_b) \mathbf{C}_{11}^{(i)} \epsilon_{zx} + t_z \mathbf{C}_{12}^{(i)} \epsilon_{rx} \\
 &\quad + \mathbf{C}_{11}^{(i)} \epsilon_{ximp} + \mathbf{C}_{12}^{(i)} \epsilon_{yimp} \\
 (1-\mu_L^2 \nabla_x^2) \sigma_y^{(i)} &= (z-z_b) \mathbf{C}_{12}^{(i)} \epsilon_{zy} + t_z \mathbf{C}_{11}^{(i)} \epsilon_{ry} \\
 &\quad + \mathbf{C}_{12}^{(i)} \epsilon_{ximp} + \mathbf{C}_{11}^{(i)} \epsilon_{yimp} \\
 (1-\mu_L^2 \nabla_x^2) \sigma_{xy}^{(i)} &= (z-z_b) \mathbf{C}_{33}^{(i)} \epsilon_{zxy} + t_z \mathbf{C}_{33}^{(i)} \epsilon_{rxy} \\
 &\quad + \mathbf{C}_{33}^{(i)} \epsilon_{xyimp} \\
 (1-\mu_L^2 \nabla_x^2) \tau_{xz}^{(i)} &= \mathbf{G}_{11}^{(i)} g_z \frac{\partial w_{zs}}{\partial x} \\
 (1-\mu_L^2 \nabla_x^2) \tau_{yz}^{(i)} &= \mathbf{G}_{22}^{(i)} g_z \frac{\partial w_{zs}}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Với biểu thức ứng suất (13) - (14), người ta thu được các thành phần mô men, mô men bậc cao và lực cắt như sau:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} - \mu_L^2 \nabla^2 \mathbf{M} &= \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} - \mu_L^2 \nabla^2 \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \\
 &= \left\{ \begin{aligned} &\int_{-h_2}^{h_x} \mathbf{C}^{(2)} \left((z-z_b) \epsilon_{z^2}^{(2)} + t_z \epsilon_{r^2}^{(2)} + \epsilon_{imp}^{(2)} \right) (z-z_d) dz \\ &+ \int_{h_x}^{h_1} \mathbf{C}^{(1)} \left((z-z_d) \epsilon_{z^2}^{(1)} + t_z \epsilon_{r^2}^{(1)} + \epsilon_{imp}^{(1)} \right) (z-z_d) dz \end{aligned} \right\} \\
 &= \mathbf{D}_z \epsilon_z + \mathbf{D}_r \epsilon_r + \mathbf{D}_{zimp} \epsilon_{zimp} \\
 \mathbf{S} - \mu_L^2 \nabla^2 \mathbf{S} &= \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{Bmatrix} - \mu_L^2 \nabla^2 \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{Bmatrix} \\
 &= \left\{ \begin{aligned} &\int_{-h_2}^{h_x} \mathbf{C}^{(2)} \left((z-z_b) \epsilon_{z^2}^{(2)} + t_z \epsilon_{r^2}^{(2)} + \epsilon_{imp}^{(2)} \right) t_z dz \\ &+ \int_{h_x}^{h_1} \mathbf{C}^{(1)} \left((z-z_b) \epsilon_{z^2}^{(1)} + t_z \epsilon_{r^2}^{(1)} + \epsilon_{imp}^{(1)} \right) t_z dz \end{aligned} \right\} \\
 &= \mathbf{D}_r \epsilon_z + \mathbf{D}_{rr} \epsilon_r + \mathbf{D}_{rimp} \epsilon_{rimp} \\
 \mathbf{Q} - \mu_L^2 \nabla^2 \mathbf{Q} &= \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} - \mu_L^2 \nabla^2 \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} \\
 &= \left\{ \int_{-h_2}^{h_x} \mathbf{G}^{(2)} s_z \epsilon_s^{(2)} dz + \int_{h_x}^{h_1} \mathbf{G}^{(1)} s_z \epsilon_s^{(1)} dz \right\} = \mathbf{D}_s \epsilon_s
 \end{aligned} \tag{14}$$

trong đó:

$$\mathbf{D}_z = \left\{ \int_{-h_2}^{h_x} \mathbf{C}^{(2)} (z-z_b)^2 dz + \int_{h_x}^{h_1} \mathbf{C}^{(1)} (z-z_b)^2 dz \right\} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_r &= \left\{ \int_{-h_2}^{h_x} \mathbf{C}^{(2)} t_z (z-z_b) dz + \int_{h_x}^{h_1} \mathbf{C}^{(1)} t_z (z-z_b) dz \right\} \\
 \mathbf{D}_{rr} &= \left\{ \int_{-h_2}^{h_x} \mathbf{C}^{(2)} t_z^2 dz + \int_{h_x}^{h_1} \mathbf{C}^{(1)} t_z^2 dz \right\}; \\
 \mathbf{D}_{zimp} &= \left\{ \int_{-h_2}^{h_x} \mathbf{C}^{(2)} (z-z_b) dz + \int_{h_x}^{h_1} \mathbf{C}^{(1)} (z-z_b) dz \right\} \\
 \mathbf{D}_{rimp} &= \left\{ \int_{-h_2}^{h_x} \mathbf{C}^{(2)} t_z dz + \int_{h_x}^{h_1} \mathbf{C}^{(1)} t_z dz \right\}; \\
 \mathbf{D}_s &= \left\{ \int_{-h_2}^{h_x} \mathbf{G}^{(2)} g_z dz + \int_{h_x}^{h_1} \mathbf{G}^{(1)} g_z dz \right\}
 \end{aligned}$$

Từ các biểu thức (14)-(15), người ta thấy rằng các thành phần nội lực của tấm phụ thuộc vào đặc trưng cơ tính vật liệu của cả hai lớp, hình dạng bề mặt tiếp xúc giữa hai lớp, cũng như sự không hoàn hảo hình dáng ban đầu.

Để tìm phương trình cân bằng tĩnh của tấm, bài báo sử dụng nguyên lý công khả dĩ: $\delta \Theta_{load} - \delta \Theta_{plate} = 0$ (16)

trong đó $\delta \Theta_{load}, \delta \Theta_{plate}$ là công khả dĩ của ngoại lực và nội lực của tấm:

$$\begin{aligned}
 \delta \Theta_{plate} &= \int_{\Omega} \int_{-h_2}^{h_1} \left(\begin{aligned} &\sigma_x^{(2)} \delta(\epsilon_x^{(2)}) + \sigma_y^{(2)} \delta(\epsilon_y^{(2)}) \\ &+ \sigma_{xy}^{(2)} \delta(\epsilon_{xy}^{(2)}) + \tau_{xz}^{(2)} \delta(\epsilon_{xz}^{(2)}) \\ &+ \tau_{yz}^{(2)} \delta(\epsilon_{yz}^{(2)}) \end{aligned} \right) dz dxdy \\
 &+ \int_{\Omega} \int_{h_x}^{h_1} \left(\begin{aligned} &\sigma_x^{(1)} \delta(\epsilon_x^{(1)}) + \sigma_y^{(1)} \delta(\epsilon_y^{(1)}) \\ &+ \sigma_{xy}^{(1)} \delta(\epsilon_{xy}^{(1)}) + \tau_{xz}^{(1)} \delta(\epsilon_{xz}^{(1)}) + \tau_{yz}^{(1)} \delta(\epsilon_{yz}^{(1)}) \end{aligned} \right) dz dxdy \\
 &+ \int_0^{b/2} \int_0^{b/2} \left(\begin{aligned} &k_w \left(1 - r_w \sin\left(\frac{x}{a}\right) \right) \times \\ &\left(1 - r_w \sin\left(\frac{y}{b}\right) \right) w_3 \delta(w_3) \end{aligned} \right) dx dy \tag{17} \\
 &= \int_{\Omega} \left(\begin{aligned} &-M_x \frac{\partial^2 \delta w_{3b}}{\partial x^2} - S_x \frac{\partial^2 \delta w_{3s}}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 \delta w_{3b}}{\partial y^2} \\ &-S_y \frac{\partial^2 \delta w_{3s}}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_{3b}}{\partial x \partial y} - 2S_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_{3s}}{\partial x \partial y} \\ &+ Q_{xz} \frac{\partial \delta w_{3s}}{\partial x} + Q_{yz} \frac{\partial \delta w_{3s}}{\partial y} \end{aligned} \right) dx dy \\
 &+ \int_0^{b/2} \int_0^{b/2} \left(\begin{aligned} &k_w \left(1 - r_w \sin\left(\frac{x}{a}\right) \right) \times \\ &\left(1 - r_w \sin\left(\frac{y}{b}\right) \right) w_3 \delta(w_3) \end{aligned} \right) dx dy
 \end{aligned}$$

với k_w là độ cứng của nền đàn hồi, r_w là tham số đặc trưng cho sự thay đổi độ cứng của nền, L_F là độ dài của nền mà tấm tựa trên nó.

Công khả dĩ của ngoại lực tác dụng lên tấm composite:

$$\delta \Theta_{load} = \int_{\Omega} Q_z \delta w_3 dA = \int_{\Omega} Q_z \delta (w_{3b} + w_{3s}) d\Omega \quad (18)$$

trong đó, Q_z là lực tác dụng vuông góc với tấm.

Lúc này, phương trình (16) được viết lại ở dạng:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) dx dy + \int_0^{L_F} \int_0^b (1 - \mu_L^2 \nabla^2) \left\{ k_w \left(1 - r_w \sin \left(\frac{x}{a} \right) \right) \times \left(1 - r_w \sin \left(\frac{y}{b} \right) \right) w_3 \right\} dx dy - \int_{\Omega} ((1 - \mu_L^2 \nabla^2) Q_z) dx dy = 0 \quad (19)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \right) dx dy + \int_0^{L_F} \int_0^b (1 - \mu_L^2 \nabla^2) \left\{ k_w \left(1 - r_w \sin \left(\frac{x}{a} \right) \right) \times \left(1 - r_w \sin \left(\frac{y}{b} \right) \right) w_3 \right\} dx dy - \int_{\Omega} ((1 - \mu_L^2 \nabla^2) Q_z) dx dy = 0$$

Tấm nano composite được chia thành các phần tử 4 nút và mỗi nút gồm 6 bậc tự do:

$$\mathbf{w}_{3e} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \begin{matrix} w_{3bi}, w_{3si}, \left(\frac{\partial w_{3b}}{\partial x} \right)_i, \\ \left(\frac{\partial w_{3s}}{\partial x} \right)_i, \left(\frac{\partial w_{3b}}{\partial y} \right)_i, \left(\frac{\partial w_{3s}}{\partial y} \right)_i \end{matrix} \right\}^T \quad (20)$$

Lúc này, bài báo rút ra các biểu thức liên hệ:

$$\mathbf{w}_{3b} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \begin{matrix} H_i w_{3bi} + H_{i+1} \left(\frac{\partial w_{3b}}{\partial x} \right)_i \\ + H_{i+2} \left(\frac{\partial w_{3b}}{\partial y} \right)_i \end{matrix} \right\} = \mathbf{X}_b \mathbf{w}_{3e} \quad (21)$$

$$\mathbf{w}_{3s} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \begin{matrix} H_i w_{3si} + H_{i+1} \left(\frac{\partial w_{3s}}{\partial x} \right)_i \\ + H_{i+2} \left(\frac{\partial w_{3s}}{\partial y} \right)_i \end{matrix} \right\} = \mathbf{X}_s \mathbf{w}_{3e}$$

$$\frac{\partial w_{3b}}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial H_i}{\partial x} w_{3bi} + \frac{\partial H_{i+1}}{\partial x} \left(\frac{\partial w_{3b}}{\partial x} \right)_i \\ + \frac{\partial H_{i+2}}{\partial x} \left(\frac{\partial w_{3b}}{\partial y} \right)_i \end{matrix} \right\} = \mathbf{X}_{bx} \mathbf{w}_{3e}$$

$$\frac{\partial w_{3s}}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial H_i}{\partial x} w_{3si} + \frac{\partial H_{i+1}}{\partial x} \left(\frac{\partial w_{3s}}{\partial x} \right)_i \\ + \frac{\partial H_{i+2}}{\partial x} \left(\frac{\partial w_{3s}}{\partial y} \right)_i \end{matrix} \right\} = \mathbf{X}_{sx} \mathbf{w}_{3e}$$

$$\frac{\partial w_{3b}}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial H_i}{\partial y} w_{3bi} + \frac{\partial H_{i+1}}{\partial y} \left(\frac{\partial w_{3b}}{\partial x} \right)_i \\ + \frac{\partial H_{i+2}}{\partial y} \left(\frac{\partial w_{3b}}{\partial y} \right)_i \end{matrix} \right\} = \mathbf{X}_{by} \mathbf{w}_{3e}$$

$$\frac{\partial w_{3s}}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial H_i}{\partial y} w_{3si} + \frac{\partial H_{i+1}}{\partial y} \left(\frac{\partial w_{3s}}{\partial x} \right)_i \\ + \frac{\partial H_{i+2}}{\partial y} \left(\frac{\partial w_{3s}}{\partial y} \right)_i \end{matrix} \right\} = \mathbf{X}_{sy} \mathbf{w}_{3e}$$

$$\frac{\partial^2 w_{3b}}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} w_{3bi} + \frac{\partial^2 H_{i+1}}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w_{3b}}{\partial x} \right)_i \\ + \frac{\partial^2 H_{i+2}}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w_{3b}}{\partial y} \right)_i \end{matrix} \right\} = \mathbf{X}_{b2x} \mathbf{w}_{3e}$$

$$\frac{\partial^2 w_{3s}}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} w_{3si} + \frac{\partial^2 H_{i+1}}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w_{3s}}{\partial x} \right)_i \\ + \frac{\partial^2 H_{i+2}}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w_{3s}}{\partial y} \right)_i \end{matrix} \right\} = \mathbf{X}_{s2x} \mathbf{w}_{3e}$$

$$\frac{\partial^2 w_{3b}}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial^2 H_i}{\partial y^2} w_{3bi} + \frac{\partial^2 H_{i+1}}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w_{3b}}{\partial x} \right)_i \\ + \frac{\partial^2 H_{i+2}}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w_{3b}}{\partial y} \right)_i \end{matrix} \right\} = \mathbf{X}_{b2y} \mathbf{w}_{3e}$$

$$\frac{\partial^2 w_{3s}}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial^2 H_i}{\partial y^2} w_{3si} + \frac{\partial^2 H_{i+1}}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w_{3s}}{\partial x} \right)_i \\ + \frac{\partial^2 H_{i+2}}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w_{3s}}{\partial y} \right)_i \end{matrix} \right\} = \mathbf{X}_{s2y} \mathbf{w}_{3e}$$

$$\frac{\partial^2 w_{3b}}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial^2 H_i}{\partial x \partial y} w_{3bi} + \frac{\partial^2 H_{i+1}}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial w_{3b}}{\partial x} \right)_i \\ + \frac{\partial^2 H_{i+2}}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial w_{3b}}{\partial y} \right)_i \end{matrix} \right\} = \mathbf{X}_{b2xy} \mathbf{w}_{3e}$$

$$\frac{\partial^2 w_{3s}}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^4 \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial^2 H_i}{\partial x \partial y} w_{3si} + \frac{\partial^2 H_{i+1}}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial w_{3s}}{\partial x} \right)_i \\ + \frac{\partial^2 H_{i+2}}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial w_{3s}}{\partial y} \right)_i \end{matrix} \right\} = \mathbf{X}_{s2xy} \mathbf{w}_{3e}$$

với H_i là hàm nội suy Hecmit.

Chuyển vị tại một điểm bất kỳ được tính toán thông qua véc tơ chuyển vị nút:

$$\mathbf{w}_3 = \begin{Bmatrix} w_{3b}, w_{3s}, \left(\frac{\partial w_{3b}}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial w_{3s}}{\partial x}\right), \\ \left(\frac{\partial w_{3b}}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial w_{3s}}{\partial y}\right) \end{Bmatrix}^T \quad (22)$$

$$= \{ \mathbf{X}_b, \mathbf{X}_s, \mathbf{X}_{bx}, \mathbf{X}_{sx}, \mathbf{X}_{by}, \mathbf{X}_{sy} \} \mathbf{w}_{3e} = \mathbf{X} \mathbf{w}_{3e}$$

Các thành phần biến dạng lúc này:

$$\begin{aligned} c_{zx} &= -\frac{\partial^2 w_{3b}}{\partial x^2} = -\mathbf{X}_{b2x} \mathbf{w}_{3e}; \\ c_{rx} &= -\frac{\partial^2 w_{3s}}{\partial x^2} = -\mathbf{X}_{s2x} \mathbf{w}_{3e}; \\ c_{ximp} &= \frac{\partial w_{3imp}}{\partial x} \frac{\partial (w_{3b} + w_{3s})}{\partial x} \\ &= \frac{\partial w_{3imp}}{\partial x} (\mathbf{X}_{bx} + \mathbf{X}_{sx}) \mathbf{w}_{3e} = \mathbf{X}_{ximp} \mathbf{w}_{3e} \\ c_{zy} &= -\frac{\partial^2 w_{3b}}{\partial y^2} = -\mathbf{X}_{b2y} \mathbf{w}_{3e}; \\ c_{ry} &= -\frac{\partial^2 w_{3s}}{\partial y^2} = -\mathbf{X}_{s2y} \mathbf{w}_{3e}; \\ c_{yimp} &= \frac{\partial w_{3imp}}{\partial y} \frac{\partial (w_{3b} + w_{3s})}{\partial y} \\ &= \frac{\partial w_{3imp}}{\partial y} (\mathbf{X}_{by} + \mathbf{X}_{sy}) \mathbf{w}_{3e} = \mathbf{X}_{yimp} \mathbf{w}_{3e} \\ c_{zxy} &= -2 \frac{\partial^2 w_{3b}}{\partial x \partial y} = -2 \mathbf{X}_{b2xy} \mathbf{w}_{3e}; \\ c_{rxy} &= -2 \frac{\partial^2 w_{3s}}{\partial x \partial y} = -2 \mathbf{X}_{s2xy} \mathbf{w}_{3e}; \\ c_{xyimp} &= \frac{\partial w_{3imp}}{\partial y} \frac{\partial (d_{3b} + d_{3s})}{\partial x} + \frac{\partial w_{3imp}}{\partial x} \frac{\partial (w_{3b} + w_{3s})}{\partial y} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial w_{3imp}}{\partial y} (\mathbf{X}_{bx} + \mathbf{X}_{sx}) \\ + \frac{\partial w_{3imp}}{\partial x} (\mathbf{X}_{by} + \mathbf{X}_{sy}) \end{bmatrix} d_{3e} = \mathbf{X}_{xyimp} \mathbf{w}_{3e} \\ c_{sx} &= \frac{\partial w_{3s}}{\partial x} = \mathbf{X}_{sx} \mathbf{w}_{3e}; \quad c_{sy} = \frac{\partial w_{3s}}{\partial y} = \mathbf{X}_{sy} \mathbf{w}_{3e}; \end{aligned} \quad (23)$$

Sau một số phép biến đổi, bài báo thu được phương trình cân bằng tĩnh của tấm nano composite như sau:

$$\sum_e (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_{fe}) \mathbf{w}_{3e} = \sum_e \mathbf{F}_e \quad (24)$$

với các ma trận độ cứng phần tử và véc tơ tải trọng nút phần tử có dạng:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \left\{ \begin{aligned} & \left(\mathbf{H}_z^T \mathbf{D}_z \mathbf{H}_z + \mathbf{H}_z^T \mathbf{D}_r \mathbf{H}_r + \mathbf{H}_r^T \mathbf{D}_r \mathbf{H}_z + \mathbf{H}_r^T \mathbf{D}_r \mathbf{H}_r \right) \\ & + \mathbf{H}_{zimp}^T \mathbf{D}_{zimp} \mathbf{H}_{zimp} + \mathbf{H}_{zimp}^T \mathbf{D}_{zimp} \mathbf{H}_z + \mathbf{H}_z^T \mathbf{D}_{zimp} \mathbf{H}_{zimp} \\ & + \mathbf{H}_{simp}^T \mathbf{D}_{simp} \mathbf{H}_{simp} + \mathbf{H}_{simp}^T \mathbf{D}_{simp} \mathbf{H}_{imp} + \mathbf{H}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{H}_s \end{aligned} \right\} d\Omega$$

$$\mathbf{K}_{fe} = \int_{\Omega_e} \left\{ \begin{aligned} & \left((1 - \mu_L^2 \nabla^2) k_w \left(1 - c_w \sin\left(\frac{x}{a}\right) \right) \times \right. \\ & \left. \left(1 - c_w \sin\left(\frac{y}{b}\right) \right) (\boldsymbol{\Psi}_b + \boldsymbol{\Psi}_s)^T (\boldsymbol{\Psi}_b + \boldsymbol{\Psi}_s) \right) \end{aligned} \right\} d\Omega \quad (25)$$

$$\mathbf{F}_e = \int_{\Omega_e} (1 - \mu_L^2 \nabla^2) Q_z (\boldsymbol{\Psi}_b + \boldsymbol{\Psi}_s) d\Omega$$

Giải phương trình (24), bài báo thu được chuyển vị uốn tĩnh của tấm nano composite.

3. KIỂM TRA ĐỘ TIN CẬY CỦA LÝ THUYẾT TÍNH TOÁN

Ví dụ kiểm chứng 1: Tấm nano chịu liên kết tựa đơn có các cạnh $a = b = 10\text{nm}$, chiều dày của tấm h có giá trị từ $a/10$ đến $a/100$, các đặc trưng vật liệu $E = 30\text{MPa}$, $\nu = 0,3$, tải trọng phân bố đều $Q_0 = 1$.

Tham số so sánh là chuyển vị tại giữa tấm nano được tính theo công thức $CV = 10^3 h^3 w_{max} / (12(1 - \nu^2) Q_0 a^4)$.

Bảng 1 trình bày kết quả tính toán và so sánh với kết quả đã công bố trong tài liệu [10, 11], các số liệu so sánh chứng tỏ sự tương đồng giữa kết quả của bài báo so với các kết quả giải tích đã công bố, điều này chứng tỏ sự tin cậy của thuật toán đã thiết lập ở phần trên.

Bảng 1. So sánh chuyển vị lớn nhất của tấm nano

a/h	μ_L (nm)	Tài liệu [10]	Tài liệu [11]	Bài báo này
10	0	4,28	4,18	4,30
	0,5	4,47	4,56	4,49
	1	5,05	4,93	5,06
50	0	4,08	4,01	4,10
	0,5	4,26	4,37	4,28
	1	4,82	4,74	4,83
100	0	4,07	4,01	4,09
	0,5	4,26	4,37	4,27
	1	4,81	4,73	4,83

Ví dụ kiểm chứng 2: Tấm vuông có $a/b = 1$, chiều dày h biến đổi từ $a/100$ đến $a/10$, đặc trưng vật liệu $E = 380\text{GPa}$, $\nu = 0,3$. Tấm chịu tải trọng tĩnh phân bố đều cường độ Q_0 . Tấm tựa trên nền đàn hồi với tham số của

nền $R_w^* = \frac{k_w a^4}{G_w}$; $G_w = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$, tham số so sánh là

chuyển vị tại giữa tấm $CV_T = 100 \frac{G_w}{Q_0 a^4} w_3 \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$. Bảng 2 thể hiện so sánh chuyển vị lớn nhất của bài báo với các kết quả tính bằng phương pháp giải tích, có thể thấy rằng lý thuyết tính toán của bài báo đảm bảo độ chính xác.

Bảng 2. So sánh chuyển vị tại giữa tấm tựa trên nền đàn hồi, $R_w^* = 81$

a/h	100	50	20	10
Tài liệu [12]	3,34	3,35	3,38	3,48
Tài liệu [13]	3,34	3,35	3,38	3,48
Bài báo này	3,36	3,37	3,40	3,50

4. TÍNH TOÁN SỐ VÀ THẢO LUẬN

Tấm nano composite có kích thước hình học $a = b = 10nm$, chiều dày tổng của tấm là $h = a/10$. Hai lớp vật liệu có cơ tính $E_1 = 70GPa$; $\nu_1 = 0,3$; $\rho_1 = 2700kg/m^3$; $E_2 = 390GPa$; $\nu_2 = 0,3$; $\rho_2 = 3960kg/m^3$ và $h_1 = 0,6h$; $h_2 = 0,4h$. Tấm tựa trên nền đàn hồi có độ cứng thay đổi và được chuẩn hóa theo công thức:

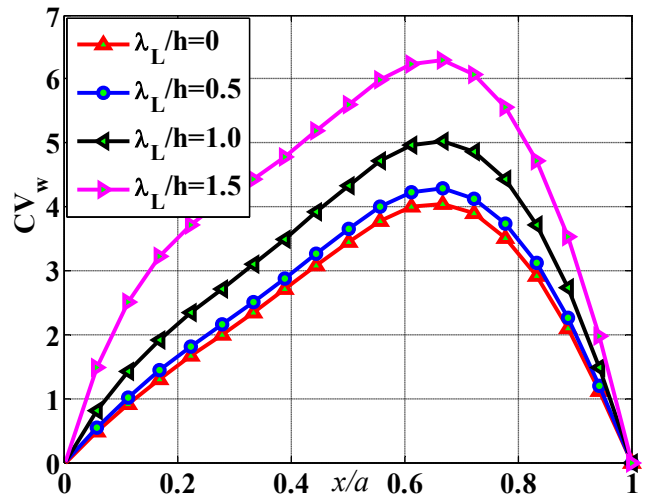
$$T_{kw} = \frac{k_w a^4}{G_w}; G_w = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu^2)} \tag{26}$$

Tấm chịu tải trọng phân bố đều cường độ Q_0 , tham số tính toán và khảo sát là chuyển vị dọc theo vị trí $y = b/2$ được tính theo công thức:

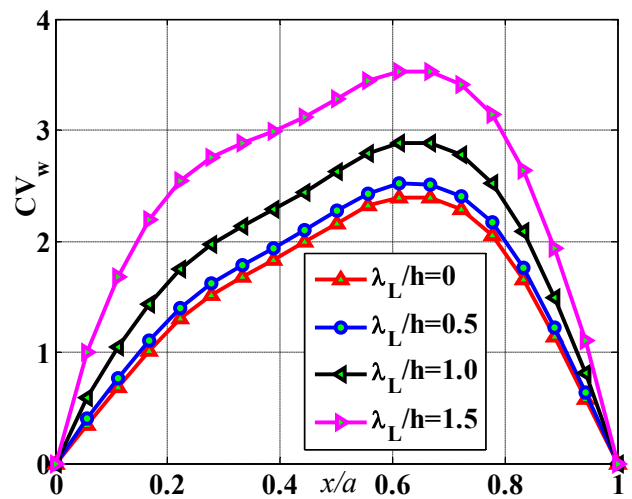
$$CV_w = 10^2 \frac{E^{(2)} h^3}{Q_0 a^4} w_3 \tag{27}$$

Thay đổi giá trị của tham số μ_L sao cho giá trị của nó biến đổi từ 0 đến 1,5 lần chiều dày tấm, kết quả tính toán chuyển vị của tấm được thể hiện như trên hình 2. Khi tăng giá trị của tham số đàn hồi phi cục bộ, chuyển vị lớn nhất của tấm tăng lên, điều này chứng tỏ tham số này làm giảm độ cứng của tấm nano. Do ảnh hưởng của nền đàn hồi và sự không hoàn hảo về hình dáng mà vị trí chuyển vị đạt cực đại của tấm không phải ở giữa tấm, đồng thời đường độ võng của tấm nano cũng khác nhau khi dạng không hoàn hảo khác nhau. Sự biến đổi của đường độ võng giữa tấm phụ thuộc vào số bước sóng N được trình bày như trên hình 3, dễ dàng nhận thấy rằng sự tăng lên của số bước sóng không tỷ lệ thuận với sự tăng lên của chuyển vị cực đại. Ngoài ra, sự thay đổi của số bước sóng cũng dẫn đến sự khác nhau của hình dáng đường độ võng, điều này là do sự thay đổi bước sóng ảnh hưởng đáng kể đến độ cứng của tấm nano tại mỗi vị trí. Sự biến đổi chuyển vị giữa tấm phụ thuộc và chiều dài của nền đàn hồi L_F được thể hiện như trên hình 4. Chiều dài L_F càng lớn thì năng lượng của tấm được bổ sung từ nền đàn

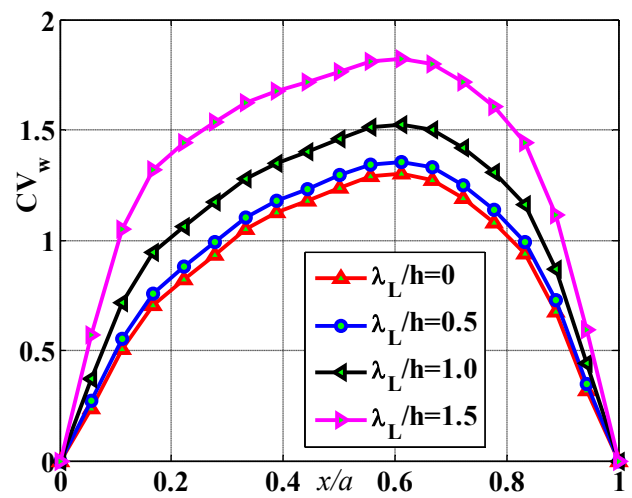
hồi càng nhiều, do đó độ cứng tổng thể của kết cấu càng tăng lên, làm chuyển vị của tấm nano càng giảm. Thêm vào đó, hình dạng của đường đáp ứng chuyển vị của tấm nano cũng thay đổi khi giá trị của L_F thay đổi.



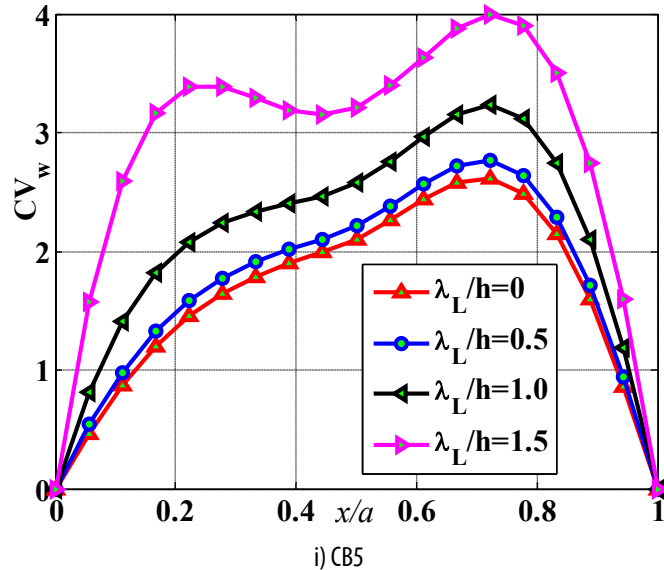
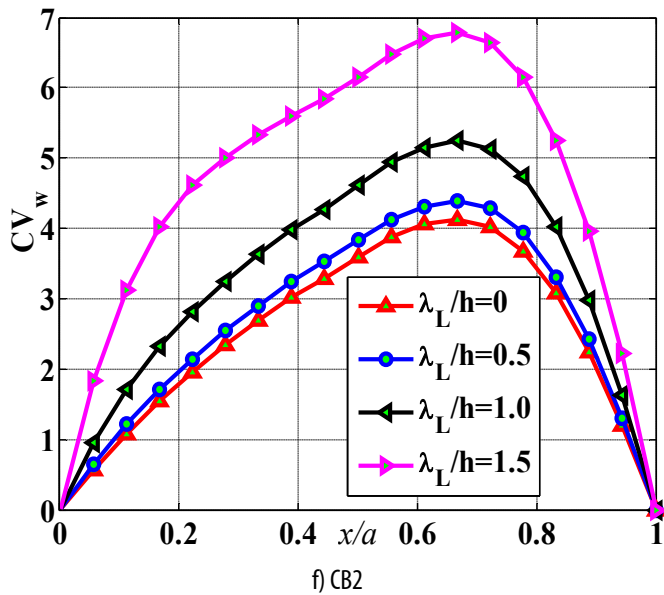
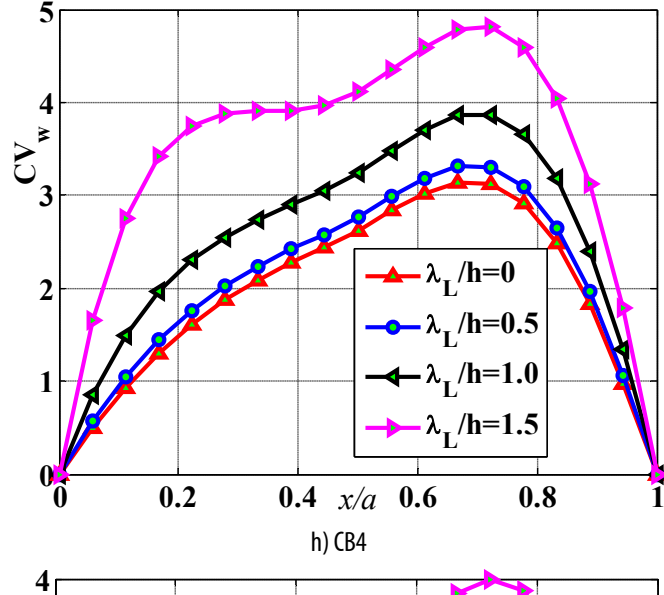
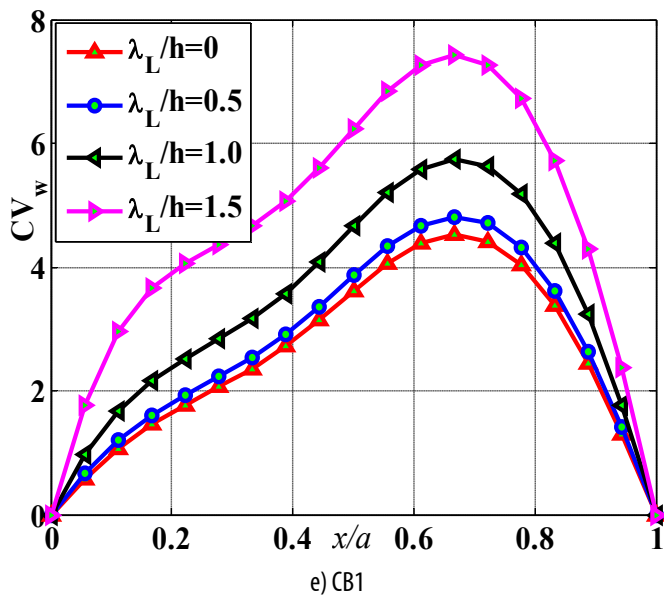
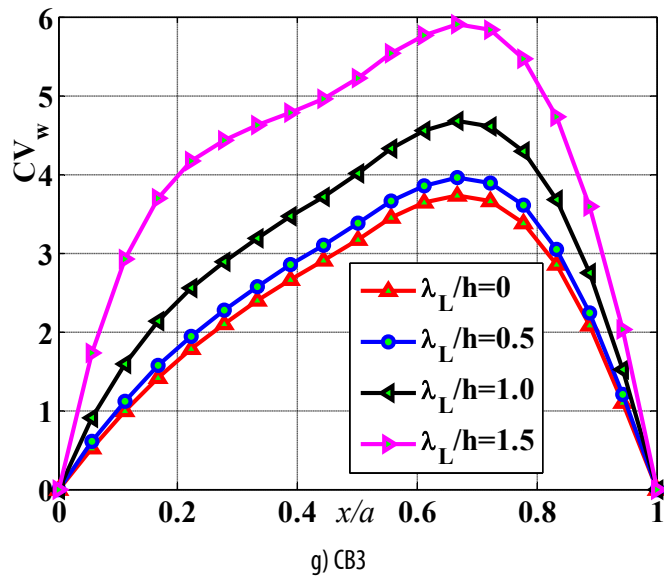
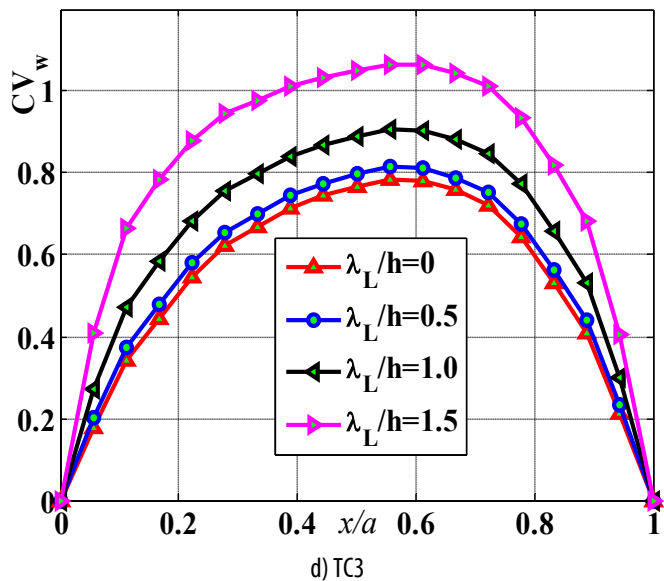
a) ĐH



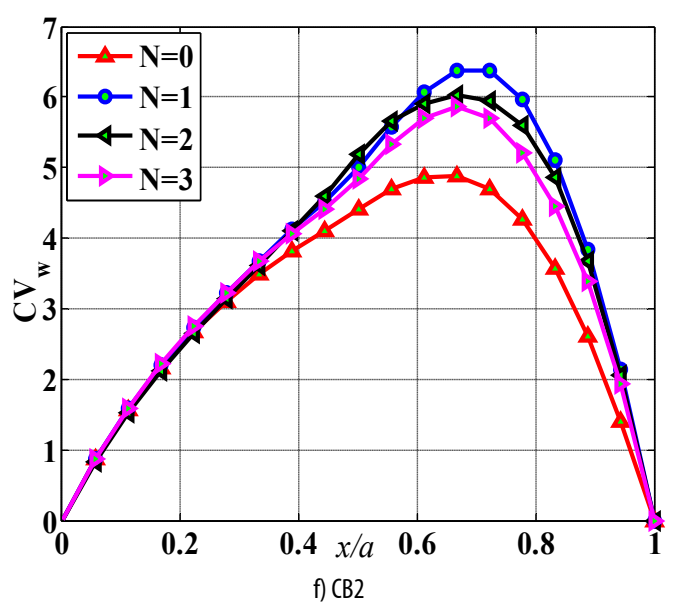
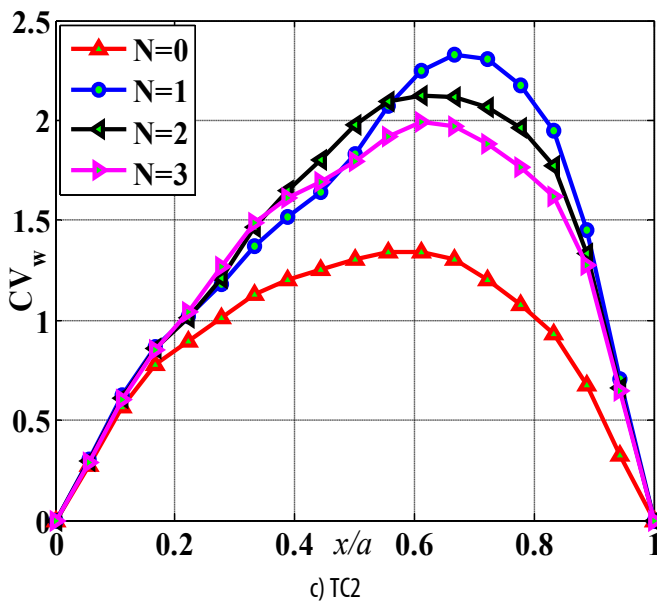
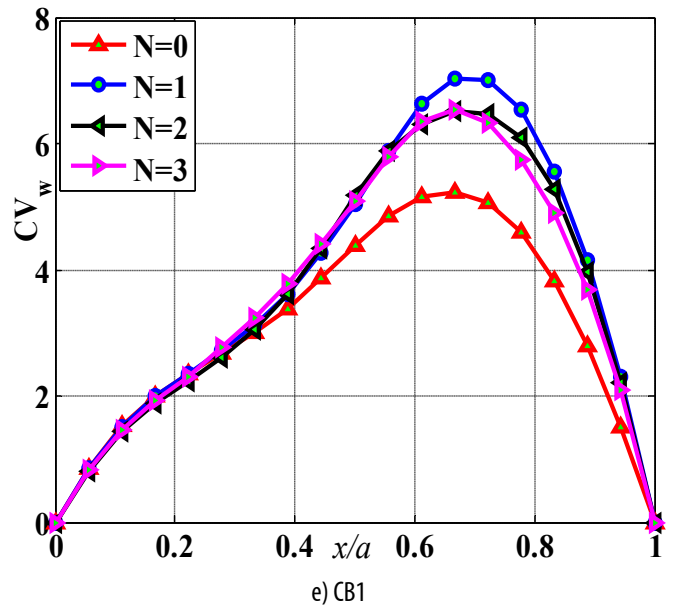
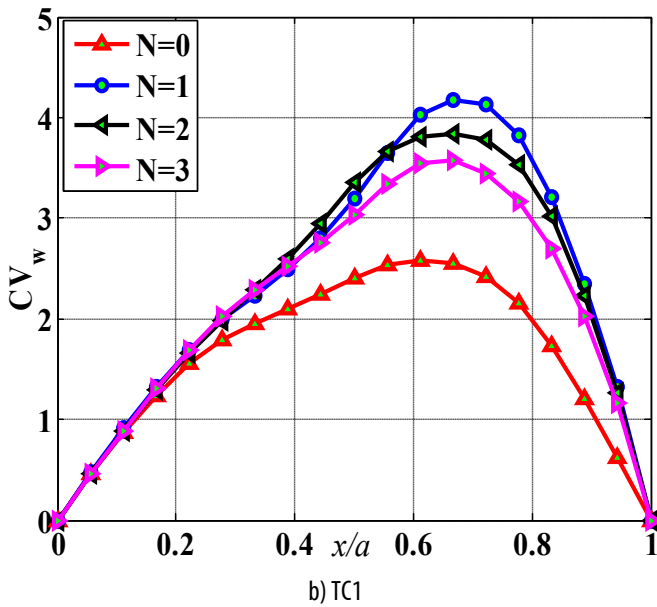
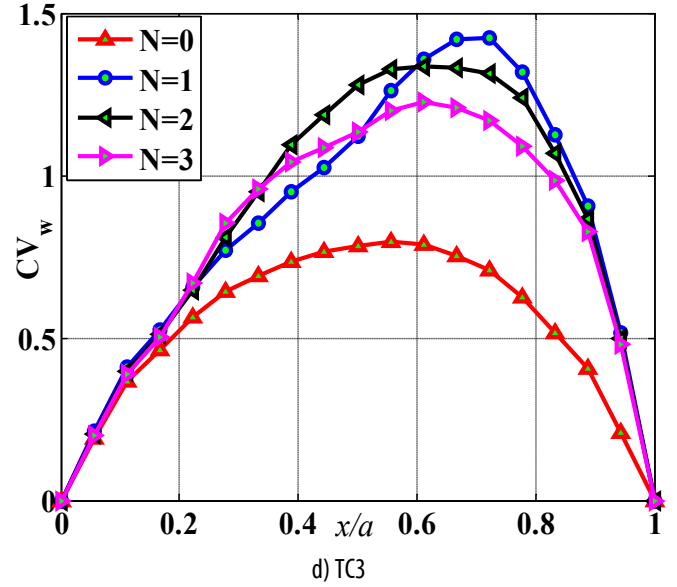
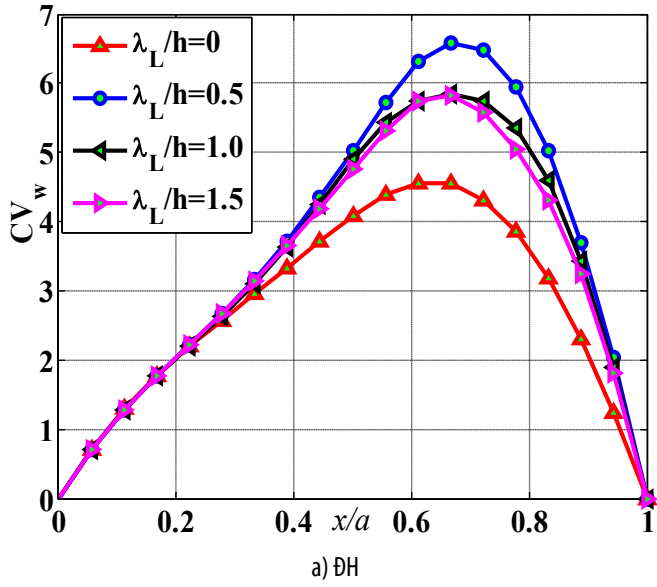
b) TC1

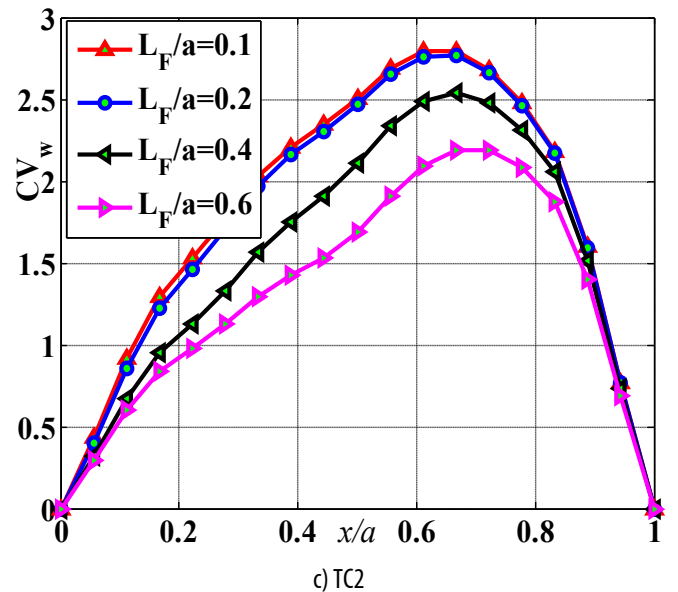
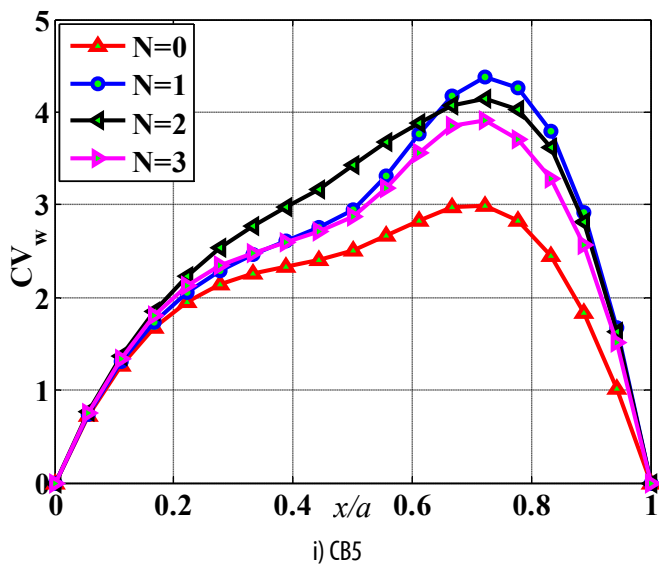
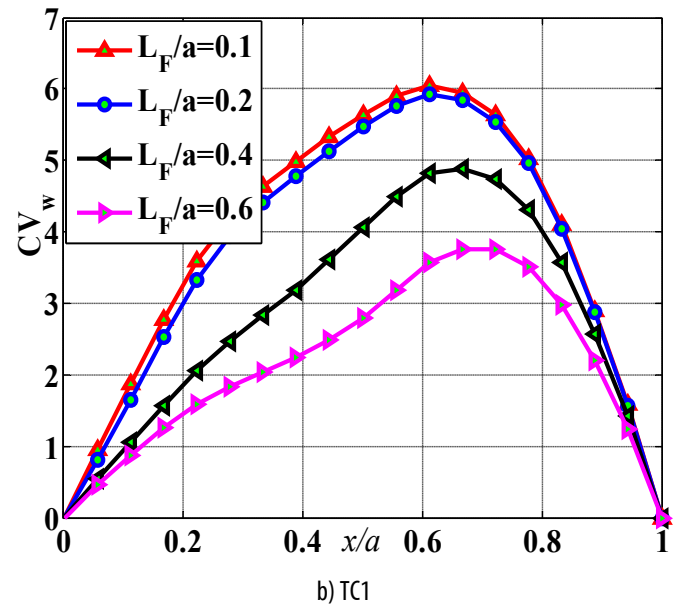
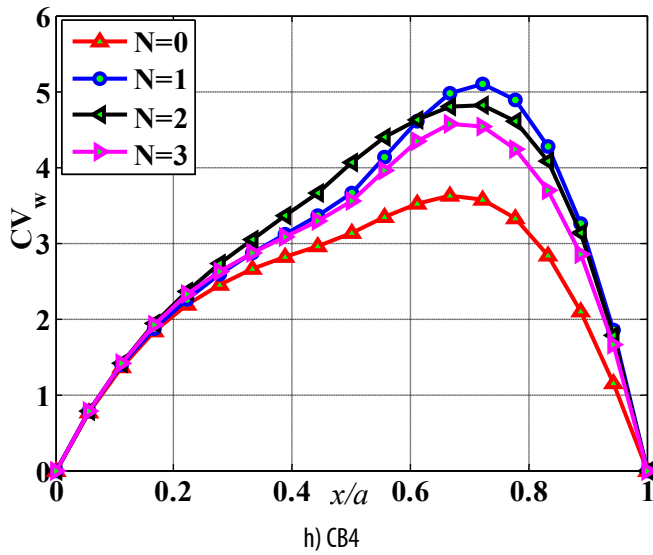
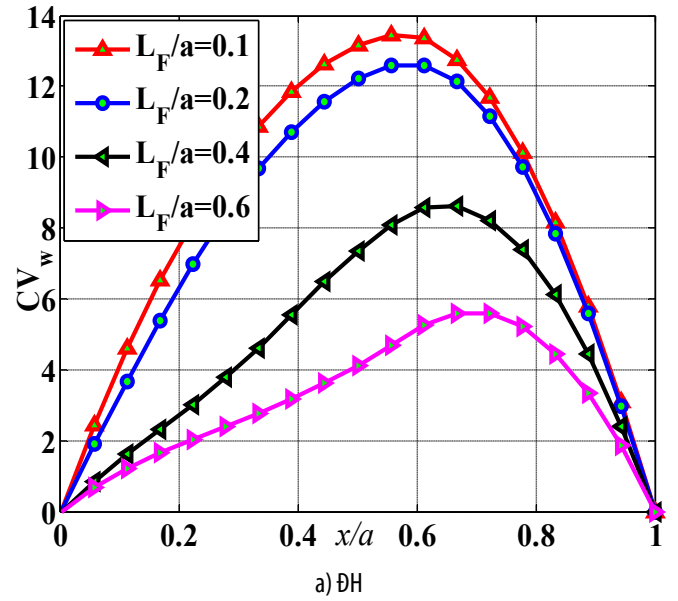
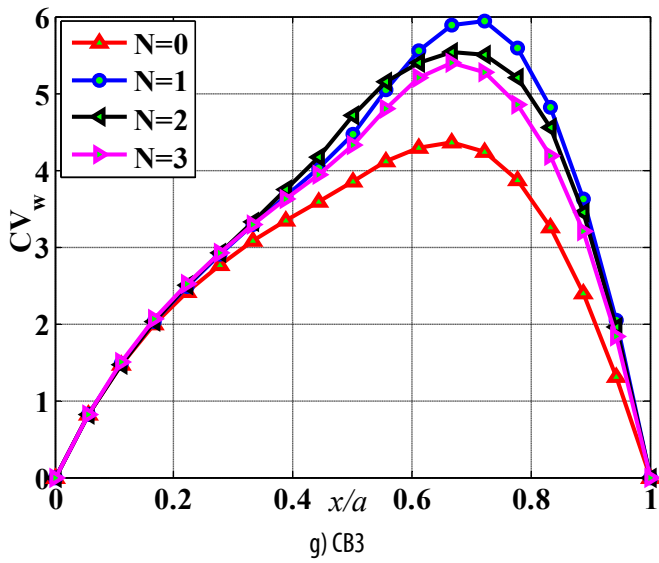


c) TC2

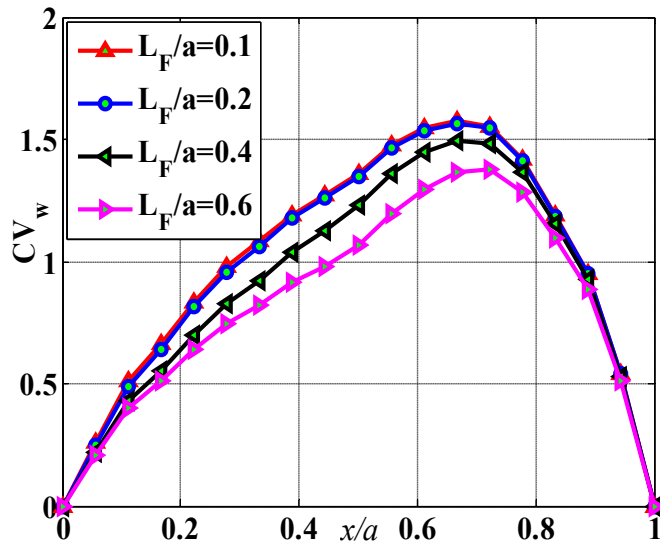


Hình 2. Chuyển vị lớn nhất của tấm phụ thuộc tham số μ_L , biên dạng sóng hình sin, $N = 0,5$; $V_{or} = 0,4$; $l_0 = 0,2$; $p_{im} = 0,3$; $r_w = 0,5$; $T_{kw} = 10^4$; $L_f/a = 0,5$

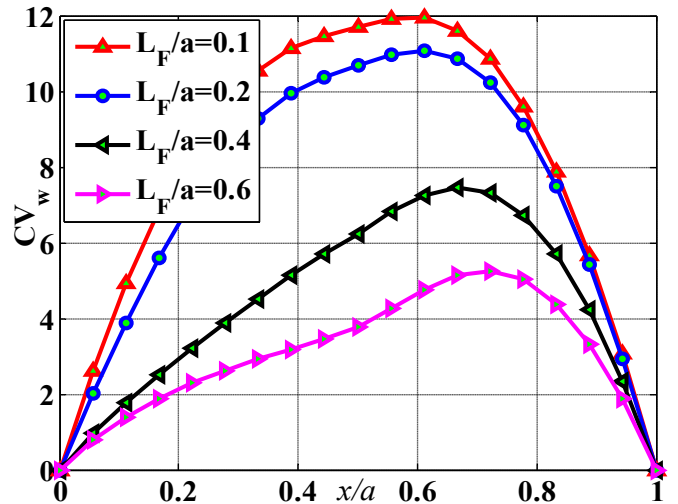




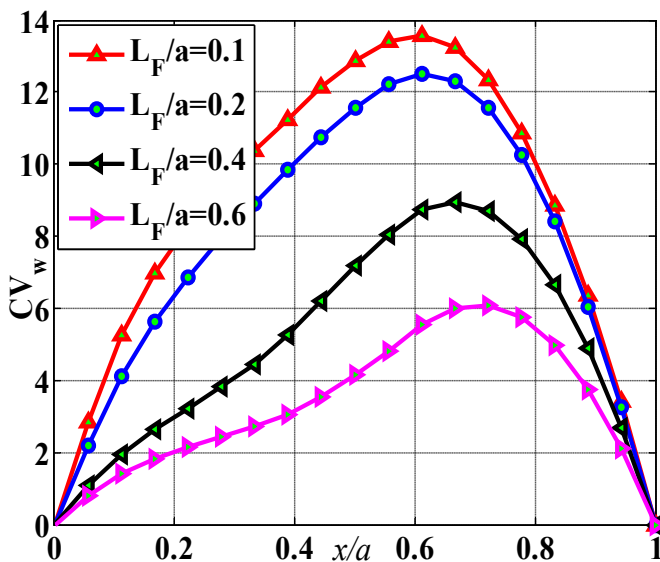
Hình 3. Chuyển vị lớn nhất của tấm phụ thuộc số bước sóng N , sóng hình vuông, $h_0/h_1 = 0,5$; $V_{or} = 0,4$; $l_0 = 0,2$; $p_{im} = 0,3$; $r_w = 0,5$; $T_{kw} = 10^4$; $L_F/a = 0,5$, $\mu_i/h = 1$



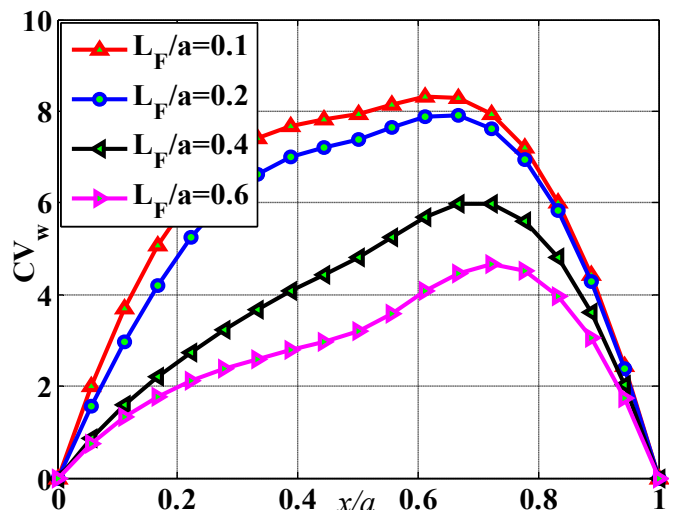
d) TC3



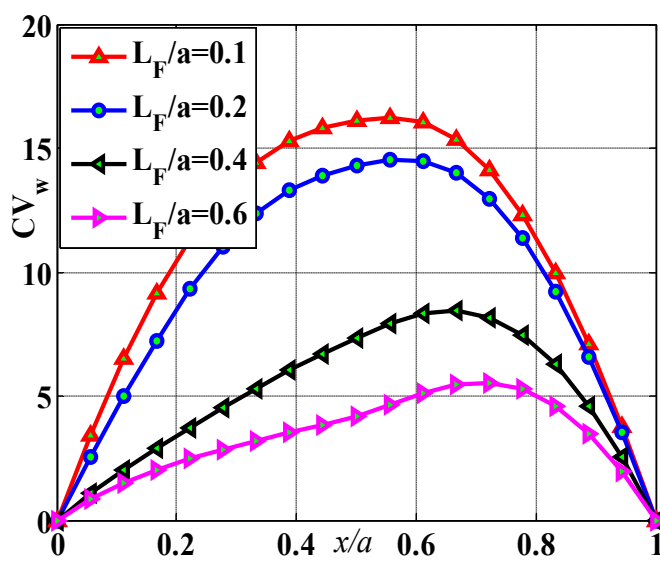
g) CB3



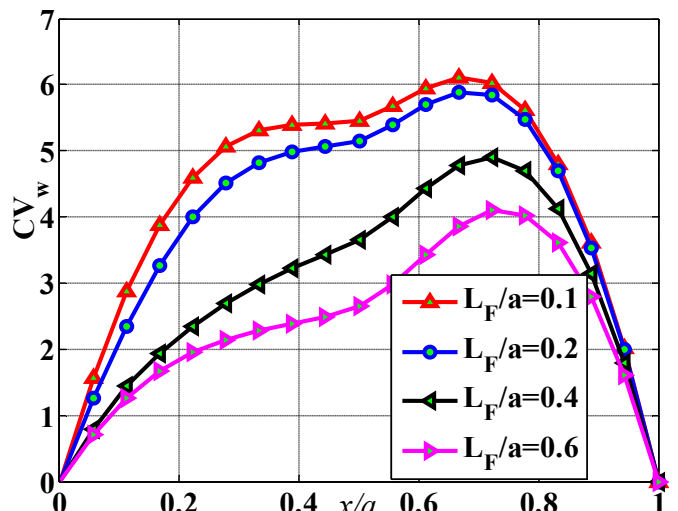
e) CB1



h) CB4



f) CB2



i) CB5

Hình 4. Chuyển vị lớn nhất của tấm phụ thuộc chiều dài nền, $h_0/h_1 = 0,5$, sóng hình vuông, $N = 1$, $V_{or} = 0,4$; $l_0 = 0,2$; $p_{im} = 0,3$; $r_w = 0,5$; $T_w = 10^4$; $L_F/a = 0,5$; $\mu_i/h = 1$

5. KẾT LUẬN

Trên cơ sở kết hợp giữa lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới và phương pháp phần tử hữu hạn, bài báo đã nghiên cứu đáp ứng uốn tĩnh của tấm composite nhiều lớp, trong đó có kể đến sự không hoàn hảo hình dáng ban đầu, sự không hoàn hảo này có nhiều dạng khác nhau từ dạng toàn cục đến dạng cục bộ. Tấm composite tựa một phần trên nền đàn hồi với tham số độ cứng biến đổi. Công thức tính toán được thiết lập trên cơ sở lý thuyết đàn hồi phi cục bộ và lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới, lý thuyết này đảm bảo không cần đến hiệu chỉnh cắt, và các kết quả kiểm chứng khẳng định sự tin cậy của chúng đối với bài toán uốn tĩnh. Từ đó, bài báo tiến hành khảo sát ảnh hưởng của một số yếu tố như tham số đàn hồi phi cục bộ, số bước sóng và chiều dài của nền đàn hồi đến đáp ứng chuyển vị uốn tĩnh của tấm nano composite. Các kết quả nghiên cứu của bài báo là tài liệu tham khảo có giá trị khi thiết kế các kết cấu tấm nhiều lớp trong thực tế, trong đó có thể lựa chọn được các đặc trưng của biên dạng tiếp xúc giữa các lớp với bước sóng thích hợp để có được kết cấu có khả năng chịu lực tốt nhất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. P. Gavallas, G. Stefanou, E. Tsivolas, "The effect of random microstructure morphology on the bending behavior of composite plate structures," *Composite Structures*, 371, 119432, 2025.
- [2]. P. T. Dat, D. T. Luat, D. V. Thom, "Free vibration of functionally graded sandwich plates with stiffeners based on the third-order shear deformation theory," *Vietnam Journal Mechanics*, 38 (2), 103-122, 2016.
- [3]. V. H. Binh, N. D. Anh, D. V. Thom, P. V. Minh, H. T. Dung, "Vibration response of nanobeams subjected to random reactions," *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 109, 105489, 2025.
- [4]. D. H. Doan, A.M. Zenkour, D. V. Thom, "Finite element modeling of free vibration of cracked nanoplates with flexoelectric effects," *Eur. Phys. J. Plus*, 137, 447, 2022. doi: 10.1140/epjp/s13360-022-02631-9
- [5]. N. C. Tho, T. Abdelouahed, V. T. Do, V. M. Phung, "Effect of flexomagneticity on the dynamic response of nanoplates using FEM," *Comp. Concr.*, 35, 5, 527-536, 2025. doi: 10.12989/cac.2025.35.5.527
- [6]. D. M. Tien, D. V. Thom, P. V. Minh, P. H. Hieu, "Bending and buckling responses of organic nanoplates considering the size effect," *Transp. Comm. Science J.*, 75, 7, 2015-2029, 2024. doi: 10.47869/tcsj.75.7.1
- [7]. V. T. Than, T. H. H. Truong, V. D. Dao, "Vibration and buckling analysis of nanoplates resting on variable elastic foundations," *Transp. Comm. Science J.*, 75, 9, 2238-2251, 2024. doi: 10.47869/tcsj.75.9.1.

[8]. C. V. Minh, D. V. Thom, P. V. Minh, C. T. Nguyen, T. L. Doan, H. H. Nguyen, "Investigation of mechanical responses of flexo-magnetic variable thickness nanoplates resting on elastic foundations, taking into account geometrical imperfections," *Front. Struct. Civil Eng.*, 18, 1951-1970, 2024. doi: 10.1007/s11709-024-1093-z.

[9]. N. C. Tho, D. M. Tien, D. V. Thom, P. V. Minh, D. V. Doan, "A new approach to the static bending problem of organic nanoplates," *Proc. Inst. Mech. Eng., Part C: J. Mech. Eng. Science*, 239, 8, 3052-3064, 2024. doi: 10.1177/09544062241306986

[10]. D. M. Tien, D. V. Thom, P. V. Minh, N. C. Tho, T. N. Doan, D. N. Mai, "The application of the nonlocal theory and various shear strain theories for bending and free vibration analysis of organic nanoplates," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2023. <https://doi.org/10.1080/15397734.2023.2186893>

[11]. R. Aghababaei, J. N. Reddy, "Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates," *J. Sound Vib.*, 326, 1-2, 277-289, 2009. doi: 10.1016/j.jsv.2009.04.044.

[12]. Huu-Tai Thai, Minwo Park, Dong-Ho Choi, "A simple refined theory for bending, buckling, and vibration of thick plates resting on elastic foundation," *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013. <http://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.03.017>

[13]. H. Kobayashi, K. Sonoda, "Rectangular Mindlin plates on elastic foundations," *International Journal of Mechanical Sciences*, 31(9):679-692, 1989.

AUTHORS INFORMATION

**Phan Quang Phuc¹, Le Van Nam²,
Pham Van Dong¹, Do Van Thom³**

¹Hanoi University of Industry, Vietnam

²Viet Duc Hospital, Vietnam

³Military Technical Academy, Vietnam