

PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH CỦA VỎ MICRO CÓ LỖ RỔNG VÀ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN HAI PHƯƠNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẲNG HÌNH HỌC

STATIC BUCKLING ANALYSIS OF BI-DIRECTIONAL FUNCTIONALLY GRADED POROUS MICROPLATE USING ISOGEOMETRIC APPROACH

Khuất Đức Dương^{1*}, Đào Như Mai²,
Nguyễn Tuấn Linh¹, Trần Thị Thu Thủy¹

DOI: <https://doi.org/10.57001/huih5804.2024.018>

TÓM TẮT

Bài báo này sử dụng phương pháp đẳng hình học (IGA), lý thuyết cặp ứng suất đôi sửa đổi kết hợp với lý thuyết vỏ cổ điển của Kirchhoff-Love để phân tích ổn định của vỏ micro có lỗ rỗng và cơ tính biến thiên theo chiều dày và phương chiều dài x . Toàn bộ vỏ được đặt trên nền đàn hồi Pasternak và cơ tính vật liệu theo hàm số mũ kết hợp với hai kiểu lỗ rỗng là đều và không đồng đều. Điểm mới của nghiên cứu là xem xét hệ số tỷ lệ chiều dài thay đổi như cơ tính của vật liệu. Nguyên lý Hamilton được áp dụng để đưa ra phương trình xác định lực mất ổn định của vỏ. Độ chính xác của phương pháp được kiểm chứng thông qua các so sánh số tin cậy. Hơn nữa, một cuộc khảo sát số để đánh giá ảnh hưởng của các tham số: lỗ rỗng, hệ số tỷ lệ chiều dài, độ cứng nền đàn hồi và các yếu tố khác đến khả năng ổn định của vỏ được thực hiện.

Từ khóa: Cơ tính biến đổi theo hai phương, phân tích đẳng hình học, ổn định, vỏ micro.

ABSTRACT

This work analyzes the buckling of porous microshell by using the isogeometric method (IGA), the modified couple stress theory, and Kirchhoff-classical Love's shell theory. In which the mechanical properties change along the x -length and thickness dimensions. The whole shell is supported by a Pasternak elastic foundation, and the exponential mechanical characteristics of the material, along with two different kinds of porosity, are both even and uneven. Consideration of the changeable length-scale characteristics as the material's mechanical properties is novel to this work. Using Hamilton's principle gives the equation for evaluating the shell of buckling. Through reliable numerical comparisons, the method's precision was determined. In addition, a numerical analysis is conducted to determine the effect of characteristics such as porosity, length-scale parameter, elastic foundation stiffness, and other coefficients on the microshell buckling.

Keywords: Bidirectional functionally graded microshell, Isogeometric analysis, static buckling, microshell.

¹Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội

²Viện Cơ học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

*Email: duongkd@hauui.edu.vn

Ngày nhận bài: 21/6/2023

Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 28/9/2023

Ngày chấp nhận đăng: 20/01/2024

1. GIỚI THIỆU

Vật liệu được phân loại theo chức năng (FGM) đã được sử dụng rộng rãi trong các lĩnh vực kỹ thuật khác nhau do các đặc tính cơ, nhiệt và điện độc đáo của chúng. Các tính chất của vật liệu thay đổi theo không gian thông qua chiều dày và chiều dài của vật liệu. Sự thay đổi không gian trong các thuộc tính này có thể được sử dụng để tối ưu hóa hiệu suất của các cấu trúc kỹ thuật. Những vật liệu này tìm thấy các ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như hàng không vũ trụ, cơ khí và kỹ thuật y sinh. Đặc biệt, các tấm micro có cơ tính biến đổi theo hai phương đã thu hút được sự chú ý đáng kể do các đặc tính độc đáo và các ứng dụng tiềm năng của chúng trong các hệ thống cơ điện tử vi mô và nano (MEMS và NEMS). Các lý thuyết nghiên cứu cho kết cấu micro có thể kể đến như lý thuyết gradient biến dạng, lý thuyết phi cục bộ, lý thuyết phi cục bộ gradient biến dạng,... Tuy nhiên lý thuyết cặp ứng suất đôi sửa đổi là được sử dụng rộng rãi nhất vì tính nó đáp ứng được các yêu cầu kết quả sát với các nghiên cứu thực nghiệm. Các nghiên cứu điển hình có thể kể đến như Thai và cộng sự [1] sử dụng mô hình tấm Kirchhoff và Mindlin đã phân tích uốn tĩnh, dao động riêng và ổn định của tấm được phân loại chức năng dựa trên lý thuyết ứng suất cặp đôi đã sửa đổi. Nguyen và cộng sự [2] đã sử dụng lý thuyết cặp ứng suất đôi sửa đổi và lý thuyết Von-Kaman để phân tích phi tuyến tính của tấm micro tựa một phần trên nền đàn hồi. Các nghiên cứu về ứng xử cơ học khác của tấm micro có thể được tìm thấy trong các nghiên cứu [3-7].

Trong những năm gần đây, một phương pháp tính toán được gọi là phân tích đẳng hình học đã xuất hiện. Phương pháp này cho phép đưa phân tích phần tử hữu hạn (FEA) vào các công cụ thiết kế CAD điển hình dựa trên NURBS. Do đó, giờ đây có thể sử dụng một tập dữ liệu duy nhất trong suốt quá trình phát triển mô hình, xác minh các mô hình đó và cải thiện các mô hình đó [8, 9]. Nhiều công việc đã được đưa vào khuôn khổ phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) và B-splines đã được sử dụng rộng rãi làm chức năng chuẩn.

Thomas Hughes đã phát triển một khuôn khổ để nghiên cứu các đường đẳng hình học và họ đã thống nhất và trình bày nó dưới tên phân tích đẳng hình học [10-12]. Kể từ đó, các phương pháp đẳng hình đã được sử dụng rộng rãi trong các phương pháp tính toán, đặc biệt là để mô phỏng hành vi cơ học của nâng cao và xác nhận. Cottrell và cộng sự [13] kể lại những hồi ức cá nhân của Argyris bằng cách áp dụng phân tích đẳng hình học cho các kích thích cấu trúc, phần tiếp theo đánh thức khả năng sáng tạo hình học của Argyris. Phương pháp đẳng hình học thực sự đã khắc phục được các yếu điểm mà phương pháp FEM để lại, mang lại các kết quả tính chính xác tương đương với phương pháp giải tích.

Tuy nhiên theo hiểu biết tốt nhất của tác giả, hiện tại chưa có nhiều công trình mô hình hóa và phân tích ứng xử cơ học của các vỏ micro có cơ tính biến đổi theo hai phương và có lỗ rỗng sử dụng phương pháp số như đẳng hình học. Do đó trong nghiên cứu này, bằng cách sử dụng phương pháp đẳng hình học, lý thuyết cặp ứng suất đôi sửa đổi và lý thuyết vỏ cổ điển, đặc điểm ổn định của vỏ micro có cơ tính biến đổi theo hai phương chiều dày và chiều dài được khám phá. Các kết quả này có thể ứng dụng trong quá trình tính toán thiết kế các kết cấu cỡ micromet và cơ tính biến đổi, góp phần nhỏ bé vào hiểu biết các đặc tính cơ học của kết cấu này.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1. Mô hình cơ học và vật liệu vỏ micro

Xem xét vỏ micro mỏng có dạng hình chữ nhật như hình 1, được chế tạo từ vật liệu có cơ tính biến thiên hai chiều gồm các pha gốm và kim loại. Các kích thước hình học của vỏ bao gồm chiều dài a, chiều rộng b và chiều dày h, R_x, R_y là hai bán kính cong của vỏ. Trong nghiên cứu này toàn bộ vỏ được đặt trên nền đàn hồi Pasternak với hai hệ số độ cứng k_w, k_s . Trong đó k_w là chỉ số độ cứng nền Winkler, k_s là hệ số độ cứng nền Pasternak. Quy luật về độ xốp của vật liệu vỏ micro sử dụng các mô hình toán học sau [14]:

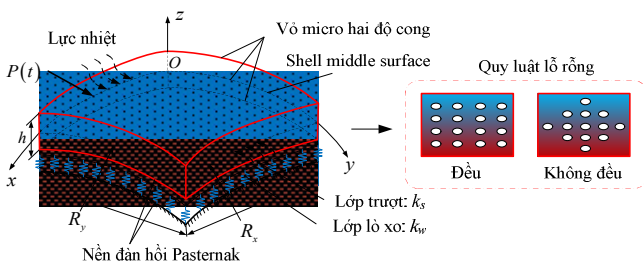
Loại 1: Độ rỗng đồng đều

$$\rho = \frac{\xi}{2} \tag{1a}$$

Loại 2: Độ rỗng không đồng đều

$$\rho = \frac{\xi}{2} \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \tag{1b}$$

Trong đó: ρ và ξ lần lượt được gọi là thể tích lỗ rỗng và hệ số lỗ rỗng.



Hình 1. Mô hình vỏ micro có cơ tính biến thiên theo hai phương trên nền đàn hồi

Quy luật cấu tạo các đặc tính cơ học của vật liệu có độ xốp bao gồm mô đun đàn hồi E (GPa), khối lượng ρ (kg/m^3), hệ số tỷ lệ chiều dài l (μm) và hệ số Poisson ν được mô tả như các công thức dưới đây [15].

$$E(x,z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1+z}{2} \right)^{\alpha_z} \left(\frac{x}{a} \right)^{\alpha_x} - \rho(E_c + E_m) \tag{2a}$$

$$\rho(x,z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1+z}{2} \right)^{\alpha_z} \left(\frac{x}{a} \right)^{\alpha_x} - \rho(\rho_c + \rho_m) \tag{2b}$$

$$l(x,z) = l_m + (l_c - l_m) \left(\frac{1+z}{2} \right)^{\alpha_z} \left(\frac{x}{a} \right)^{\alpha_x} - \rho(l_c + l_m) \tag{2c}$$

$$\nu(x,z) = \nu_m + (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{1+z}{2} \right)^{\alpha_z} \left(\frac{x}{a} \right)^{\alpha_x} - \rho(\nu_c + \nu_m) \tag{2d}$$

trong đó các chỉ số m và c lần lượt biểu thị các thành phần kim loại và gốm; α_z và α_x là các hệ số mũ điều khiển thể tích vật liệu lần lượt theo hướng chiều dày và chiều dài x.

Trên cơ sở lý thuyết vỏ cổ điển của Kirchhoff-Love, trường chuyển vị của vỏ micro tại mọi điểm bất kỳ với u_0, v_0 và w_0 lần lượt là chuyển vị theo hướng trục x, y, z biểu diễn là:

$$\begin{cases} u_x = \left(1 + \frac{z}{R_x} \right) u_0(x,y) - zw_{0,x}(x,y) \\ u_y = \left(1 + \frac{z}{R_y} \right) v_0(x,y) - zw_{0,y}(x,y) \\ u_z = w_0(x,y) \end{cases} \tag{3}$$

Theo lý thuyết cặp ứng suất đôi sửa đổi [16], các phương trình cấu thành cho một đẳng hướng vật liệu đàn hồi tuyến tính là:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}; \theta_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij} \tag{4}$$

ở đây: σ_{ij} là các thành phần ứng suất cục bộ, θ_{ij} là các thành phần của phần lệch của ten-xơ ứng suất cặp đối xứng; λ và μ là các hằng số Lamé's. ϵ_{ij} và χ_{ij} lần lượt là các ten-xơ biến dạng và tensor độ cong đối xứng được xác định bởi:

$$\epsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}; \chi_{ij} = \frac{1}{2} (\Phi_{i,j} + \Phi_{j,i}); \Phi_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} u_{k,j} \tag{5}$$

Theo các công thức (3) và (5) trường biến dạng tuyến tính ϵ_{ij} và các thành phần ten-xơ độ cong χ_{ij} đặc trưng cho vỏ micro được xác định là:

$$\epsilon_{xx} = u_{x,x} + \frac{u_z}{R_x} = u_{0,x} + \frac{w_0}{R_x} - z \left(w_{0,xx} - \frac{u_{0,x}}{R_x} \right) \tag{6}$$

$$\epsilon_{yy} = u_{y,y} + \frac{u_z}{R_y} = v_{0,y} + \frac{w_0}{R_y} - z \left(w_{0,yy} - \frac{v_{0,y}}{R_y} \right) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{xy} &= u_{x,y} + u_{y,x} \\ &= u_{0,y} + v_{0,x} - z \left(2w_{0,xy} - \frac{u_{0,y}}{R_x} - \frac{v_{0,x}}{R_y} \right) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\chi_{xx} = w_{0,xy} - \frac{v_{0,x}}{2R_y}; \chi_{yy} = -w_{0,xy} + \frac{u_{0,y}}{2R_x}; \quad (9)$$

$$\chi_{zz} = \frac{u_{0,y}}{2R_x} - \frac{v_{0,x}}{2R_y};$$

$$\chi_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{0,x}}{2R_x} - w_{0,xx} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{0,y}}{2R_y} - w_{0,yy} \right); \quad (10)$$

$$\chi_{xz} = -\frac{1}{4} (u_{0,xy} - v_{0,xx}) - \frac{1}{4} z \left(\frac{u_{0,xy}}{R_x} - \frac{v_{0,xx}}{R_y} \right); \quad (11)$$

$$\chi_{yz} = -\frac{1}{4} (u_{0,yy} - v_{0,xy}) - \frac{1}{4} z \left(\frac{u_{0,yy}}{R_x} - \frac{v_{0,xy}}{R_y} \right); \quad (12)$$

Từ đây, mối quan hệ giữa ứng suất (σ_{ij}, θ_{ij}) và biến dạng của kết cấu vỏ micro được biểu diễn như các công thức dưới đây:

$$\sigma_{xx} = \frac{E(x,z)}{1-\nu(x,z)^2} (\epsilon_{xx} + \nu(x,z)\epsilon_{yy});$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E(x,z)}{1-\nu(x,z)^2} (\epsilon_{yy} + \nu(x,z)\epsilon_{xx}); \quad (13)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E(x,z)\epsilon_{xy}}{2(1+\nu(x,z))}.$$

$$\{\theta_{xx}, \theta_{yy}, \theta_{zz}, \theta_{xy}, \theta_{xz}, \theta_{yz}\}$$

$$= \frac{E(x,z)I^2}{1+\nu(x,z)} \{\chi_{xx}, \chi_{yy}, \chi_{zz}, \chi_{xy}, \chi_{xz}, \chi_{yz}\} \quad (14)$$

2.2. Các phương trình chuyển động tổng quát

Sử dụng nguyên lý cực tiểu thế năng Hamilton, các phương trình chuyển động tổng quát của vỏ micro có cơ tính biến thiên theo hai phương trên nền đàn hồi được cho như sau:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta U_f + \delta V) dt = 0 \quad (15)$$

ở đây, δU , δU_f và δV lần lượt là biến phân thế năng biến dạng đàn hồi của vỏ, biến phân thế năng biến dạng của nền đàn hồi Pasternak và biến phân công ngoại lực của vỏ. Các công thức xác định các thành phần biến phân này được cho như sau:

$$\delta U = \int_{S_e} \left(\epsilon^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \delta \epsilon + \psi^T \mathbf{A}_{mb} \delta \psi + \chi^T \mathbf{A}_{ms} \delta \chi \right) dx dy \quad (16)$$

$$\delta U_f = \int_{S_e} (k_w w_0 \delta w_0 - k_s (w_{0,xx} + w_{0,yy}) \delta w_0) dx dy \quad (17)$$

$$\delta V = \int_{S_e} \left(q_0 \delta w_0 - (N_x^0 - N_x^{Th}) w_{0,xx} \right. \\ \left. - (N_y^0 - N_y^{Th}) w_{0,yy} \right) \delta w_0 dx dy \quad (18)$$

Ở đây:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ \epsilon^1 \end{Bmatrix}; \epsilon^0 = \begin{Bmatrix} u_{0,x} + \frac{w_0}{R_x} \\ v_{0,y} + \frac{w_0}{R_y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix}; \quad (19)$$

$$\epsilon^1 = - \begin{Bmatrix} w_{0,xx} - \frac{u_{0,x}}{R_x} \\ w_{0,yy} - \frac{v_{0,y}}{R_y} \\ 2w_{0,xy} - \frac{u_{0,y}}{R_x} - \frac{v_{0,x}}{R_y} \end{Bmatrix};$$

$$\psi = \begin{Bmatrix} w_{0,xy} - \frac{v_{0,x}}{2R_y} \\ -w_{0,xy} + \frac{u_{0,y}}{2R_x} \\ \frac{u_{0,y}}{2R_x} - \frac{v_{0,x}}{2R_y} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{u_{0,x}}{2R_x} - w_{0,xx} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{0,y}}{2R_y} - w_{0,yy} \right) \end{Bmatrix}; \chi = \begin{Bmatrix} \chi^0 \\ \chi^1 \end{Bmatrix}; \quad (20)$$

$$\chi^0 = -\frac{1}{4} \begin{Bmatrix} u_{0,xy} - v_{0,xx} \\ u_{0,yy} - v_{0,xy} \end{Bmatrix}; \chi^1 = -\frac{1}{4} \begin{Bmatrix} \frac{u_{0,xy}}{R_x} - \frac{v_{0,xx}}{R_y} \\ \frac{u_{0,yy}}{R_x} - \frac{v_{0,xy}}{R_y} \end{Bmatrix};$$

trong đó, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}, \mathbf{A}_{mb}$ và \mathbf{A}_{ms} lần lượt là các ma trận độ cứng của vật liệu được xác định như các công thức dưới đây:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}) = \int_{-h/2}^{+h/2} Q_b(1, \bar{z}, \bar{z}^2) dz; \quad (21)$$

$$\mathbf{A}_{mb} = \int_{-h/2}^{+h/2} Q_{mb} dz; \mathbf{A}_{ms} = \int_{-h/2}^{+h/2} Q_{ms} dz \quad (22)$$

Q_b, Q_{mb} và Q_{ms} là các ma trận thuộc tính cơ học của vật liệu and $\bar{z} = z - t_0$, t_0 là khoảng cách từ mặt phẳng trung bình tới mặt phẳng trung hòa của vỏ. Các thành phần trên được tính như sau:

$$Q_b = \frac{E(x,z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; Q_{mb} = \frac{E(x,z)I^2}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad (23)$$

$$Q_{ms} = \frac{2E(x,z)I^2}{1+\nu}; t_0 = \frac{\int_{-h/2}^{+h/2} E(x,z)z dz}{\int_{-h/2}^{+h/2} E dz}.$$

N_x^0, N_y^0, N_x^{Th} và N_y^{Th} là lực cơ học và lực nhiệt tác dụng lên kết cấu theo các phương tiếp tuyến của vỏ. Giả thiết $N_x^0 = N_y^0 = N_0, N_x^{Th} = N_y^{Th} = N^{Th}$

Từ công thức (15), sau khi thực hiện các bước tích phân từng phần và bỏ qua điều kiện biên ranh giới Neuman [17], bài báo thu được phương trình xác định lực ổn định của vỏ micro có cơ tính biến đổi theo hai phương như sau:

$$\int_{S_e} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A}_{mb} \delta \boldsymbol{\psi} + \mathbf{X}^T \mathbf{A}_{ms} \delta \mathbf{X} \right) dx dy + \int_{S_e} \left(k_w w_0 \delta w_0 + (k_s - N_0 + N^{Th}) \left(w_{0,x} \delta w_{0,x} + w_{0,y} \delta w_{0,y} \right) \right) dx dy = 0 \tag{24}$$

3. PHÂN TÍCH ĐẲNG HÌNH HỌC

Các chuyển vị trong mặt phẳng trung bình được xấp xỉ là [18]:

$$\mathbf{d}^h = \sum_{l=1}^{Ne} \mathbf{C}_l \mathbf{d}_l; \mathbf{d}_l = [u_{0e}, v_{0e}, w_{0e}] \tag{25}$$

ở đây: \mathbf{C}_e và \mathbf{d}_e lần lượt biểu diễn các hàm dạng và vectơ chuyển vị tại điểm điều khiển l và $Ne = (p + 1)(q + 1)$ là số lượng điểm điều khiển trên toàn vỏ, p và q là bậc Hàm cơ sở B-spline.

Thay thế công thức (25) vào công thức (3), các thành phần chuyển vị u_0, v_0 và w_0 được tính như sau:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{l=1}^{Ne} [\mathbf{C}_l \ 0 \ 0] \mathbf{d}_l = \sum_{l=1}^{Ne} \mathbf{H}_l^u \mathbf{d}_l; \\ v_0 &= \sum_{l=1}^{Ne} [0 \ \mathbf{C}_l \ 0] \mathbf{d}_l = \sum_{l=1}^{Ne} \mathbf{H}_l^v \mathbf{d}_l; \\ w_0 &= \sum_{l=1}^{Ne} [0 \ 0 \ \mathbf{C}_l] \mathbf{d}_l = \sum_{l=1}^{Ne} \mathbf{H}_l^w \mathbf{d}_l; \end{aligned} \tag{26}$$

Thay thế các công thức (26) vào công thức (24), chúng ta có thể thu được các phương trình cân bằng tổng thể cho dao động tự do của vỏ micro như sau:

$$(\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_f + \mathbf{K}_T - N_0 \mathbf{K}_G) \mathbf{d} = 0 \tag{27}$$

Với $\mathbf{K}_p = \sum_{l=1}^{Ne} \mathbf{K}_s^l, \mathbf{K}_f = \sum_{l=1}^{Ne} \mathbf{K}_f^l, \mathbf{K}_T = \sum_{l=1}^{Ne} \mathbf{K}_T^l, \mathbf{K}_G = \sum_{l=1}^{Ne} \mathbf{K}_G^l$ và \mathbf{d} lần

lượt là ma trận độ cứng của vỏ, ma trận độ cứng nền đàn hồi Pasternak, ma trận độ cứng nhiệt, ma trận độ cứng hình học và véc tơ chuyển vị của vỏ micro.

Điều kiện biên

- Tựa đơn giản (S):

$$u_0 = w_0 = w_{0,x} = 0 \text{ tại } y = 0, b \text{ và } v_0 = w_0 = w_{0,y} = 0 \text{ tại } x = 0, a$$

- Ngàm (C)

$$u_0 = v_0 = w_0 = w_{0,x} = w_{0,y} = 0 \text{ trên tất cả các cạnh.}$$

- Tự do (F)

$$u_0 = v_0 = w_0 = w_{0,x} = w_{0,y} \neq 0 \text{ tại tất cả các cạnh.}$$

4. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Với mô hình cơ học và toán học đã được thực hiện ở phần 2 và 3, một chương trình tính được thực hiện trên phần mềm Matlab để xác định lực ổn định của vỏ micro có cơ tính biến đổi theo hai phương với các điều kiện biên bất kỳ. Độ hội tụ và chính xác của chương trình được kiểm chứng thông qua so sánh số với các kết quả đã được công bố. Để thuận tiện cho quá trình đưa ra các kết quả số, một vài công thức không thứ nguyên sau đây được sử dụng:

$$\bar{\lambda}_N = \lambda_N \frac{N_0 a^2}{D_c}; K_w = \frac{k_w a^4}{D_c}; K_s = \frac{k_s a^2}{D_c}; D_c = \frac{E_c h^3}{12(1 - \nu_c^2)}$$

4.1. Xác minh độ hội tụ và chính xác

Đầu tiên, đặc tính hội tụ đối với kết quả ổn định $\bar{\lambda}_N$ của tấm micro cơ tính biến thiên theo phương chiều dày và chịu liên kết tựa đơn trên 4 cạnh (SSSS) được thực hiện và trình bày như trên bảng 1. Các số liệu đầu vào và kết quả lực ổn định $\bar{\lambda}_N$ của vỏ micro được lấy từ trong nghiên cứu [18]. Với bốn lưới phần tử hữu hạn riêng biệt được phân tích cho từng trường hợp vỏ để xác định tốc độ hội tụ của phương pháp IGA được đề xuất. Như được hiển thị trong bảng 1, trong khi sự hội tụ nhanh của phân tích được ghi lại cho các bậc đa thức $p = 3$ và $p = 4$, các nghiệm sử dụng $p = 2$ thể hiện tốc độ hội tụ tương đối chậm đối với các IGA [18]. Dựa trên các kết quả trên, lưới phần tử NURBS khối 11×11 ($p = 4$) được sử dụng cho các khảo sát tiếp theo.

Bảng 1. Sự hội tụ của lực ổn định Ω_1 của vỏ micro có cơ tính biến thiên ($h/a = 0,1, \alpha_z = 1$)

		Lưới phần tử					
l/h	p	7x7	9x9	11x11	13x13	[1]	
0,2	2	9,7896	9,7889	9,7882	9,7880	9,7880	
	3	9,7885	9,7884	9,7880	9,7880		
	4	9,7880	9,7880	9,7880	9,7880		
0,8	2	33,3910	33,3899	33,3894	33,3892	33,3892	
	3	33,3992	33,3892	33,3892	33,3892		
	4	33,3892	33,3892	33,3892	33,3892		

Bảng 2. So sánh lực ổn định $\bar{\lambda}_N$ của tấm micro có cơ tính biến thiên theo phương chiều dày

		$\alpha_z = 0$		$\alpha_z = 1$		$\alpha_z = 10$	
	l/h	[18]	Bài báo	[18]	Bài báo	[18]	Bài báo
Lực tác dụng cả 4 cạnh	0,2	22,0863	22,0863	9,7880	9,7880	4,3560	4,3560
	0,4	30,6685	30,6685	14,5082	14,5082	5,9164	5,9164
	0,8	64,9976	64,9976	33,3892	33,3892	12,1581	12,1581
	1,0	90,7444	90,7444	47,5499	47,5499	16,8393	16,8393
Lực tác dụng lên 2 cạnh	0,2	44,1725	44,1725	19,5759	19,5759	8,7120	8,7120
	0,4	61,3371	61,3371	29,0164	29,0164	11,8328	11,8328
	0,8	129,9952	129,9952	66,7784	66,7784	24,3161	24,3161
	1,0	181,4888	181,4888	95,0999	95,0999	33,6786	33,6786

Tiếp theo, trên bảng 2 trình bày kết quả so sánh lực ổn định $\bar{\lambda}_N$ của tấm FG micro. Độ dày của vỏ được chỉ định là trung bình ($a/h = 10$) với bốn giá trị của tham số tỷ lệ chiều dài vật liệu $l/h = 0,2; 0,4; 0,8; 1,0$ và $\alpha_z = 0, 1, 10$. Các kết quả lực ổn định $\bar{\lambda}_N$ do bài báo đề xuất hoàn toàn phù hợp với các kết quả được báo cáo trong [18] như đã thấy trong bảng 2. Từ các kết quả so sánh trên, cho thấy được tính hội tụ và chính xác của phương pháp và các công thức mà bài báo xây dựng.

4.2. Nghiên cứu số

Tại tiểu mục này, ảnh hưởng của các tham số đầu vào đến lực ổn định tĩnh của vỏ micro có cơ tính biến đổi theo hai phương được nghiên cứu và bình luận. Các kết quả này được trình bày dưới dạng các đồ thị và tham số đầu vào được lấy chung cho các khảo sát như sau: $l/h = 30, b = a, \alpha_z = 0,5, \alpha_x = 1, \xi = 0,1, l_c = h, l_m = h/2, K_w = 30, K_s = 3, \Delta T = 200K$. Vật liệu vỏ được sử dụng là gốm: $Al_2O_3 = 380GPa, \rho_c = 3800kgm^{-3}, \nu_c = 0,3$ và kim loại: $Al, E_m = 70GPa, \rho_c = 2700kgm^{-3}, \nu_m = 0,3$ (mỗi trường hợp khảo sát sẽ thay đổi một vài số liệu, các số liệu còn lại được giữ nguyên)

Đầu tiên, ảnh hưởng của hệ số mũ thể tích vật liệu: α_z, α_x đến lực ổn định $\bar{\lambda}_N$ của vỏ được trình bày như bảng 3. Từ bảng số liệu cho thấy, lực ổn định $\bar{\lambda}_N$ giảm khi hệ số α_z, α_x tăng lên, điều này được giải thích là sự tăng lên của α_z, α_x làm cho tỷ lệ kim loại trong vật liệu vỏ tăng lên do đó độ cứng của vỏ giảm. Hơn nữa $0 \leq \alpha_z, \alpha_x \leq 2$ là khoảng lực ổn định $\bar{\lambda}_N$ giảm nhanh nhất, sau giá trị này, tốc độ suy giảm của lực ổn định $\bar{\lambda}_N$ chậm hơn. Và trong hai loại lỗ rỗng, loại lỗ rỗng 2 sẽ cho kết cấu có lực ổn định lớn hơn. Một điều nữa có thể thấy là, vỏ micro có cơ tính thay đổi theo hai phương sẽ mềm hơn vỏ micro có cơ tính thay đổi theo một phương hoặc đẳng hướng. Tuy nhiên vỏ micro có cơ tính thay đổi theo nhiều phương sẽ giúp kết cấu có được nhiều đặc tính quý của các loại vật liệu khác nhau trên mỗi vị trí vỏ. Ngoài ra các dạng vỏ khác nhau cũng cho các kết quả thay đổi và được tìm thấy trong bảng giá trị này

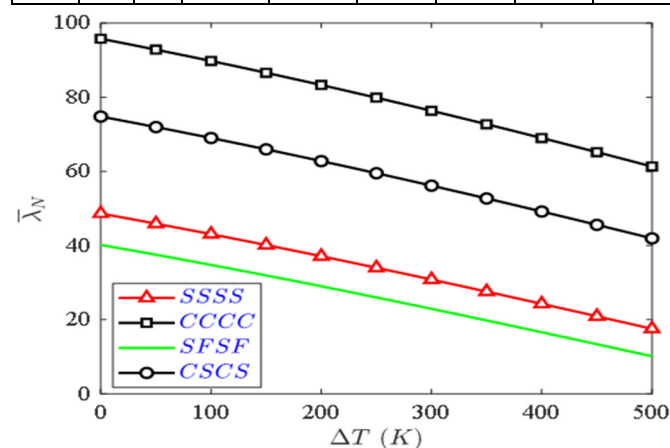
Tiếp theo, hình 2 mô tả kết quả lực ổn định $\bar{\lambda}_N$ do sự thay đổi của độ chênh lệch nhiệt độ và các điều kiện biên khác nhau tác dụng lên kết cấu vỏ. Đúng như dự đoán, lực ổn định của vỏ giảm đáng kể khi nhiệt độ tăng lên, điều này được giải thích là do nhiệt độ tăng lên sẽ làm cho độ cứng nhiệt tăng và làm giảm độ cứng chung của tổng thể kết cấu.

Hình 3 là ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng và các điều kiện biên khác nhau đến các kết quả lực ổn định $\bar{\lambda}_N$ được mô tả rõ ràng trên hình 4. Xu hướng chung cho thấy, hệ số lỗ rỗng tăng lên làm cho lực ổn định giảm, hay nói cách khác, hệ số lỗ rỗng làm giảm độ cứng của vỏ. Hơn nữa, các điều kiện biên khác nhau, cũng có tác dụng điều khiển độ cứng của vỏ và ở đây cho thấy điều kiện biên CCCC cho độ cứng lớn nhất và nhỏ nhất là điều kiện biên SFSF.

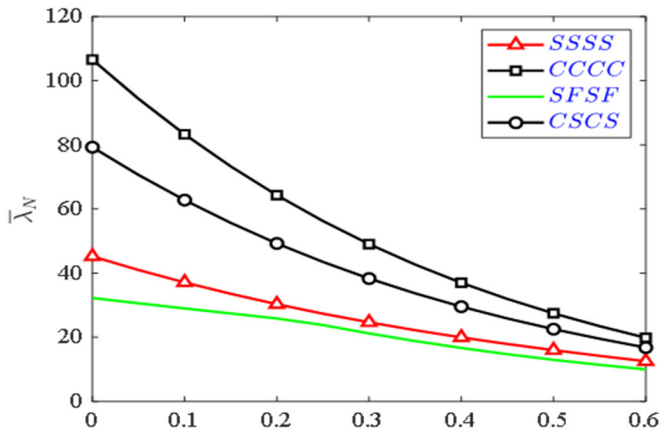
Hình 4 mô tả ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi Pasternak gồm K_w, K_s đến giá trị lực ổn định $\bar{\lambda}_N$ của vỏ micro, cũng như hệ số tỷ lệ chiều dài vật liệu, sự tăng lên của độ cứng nền đàn hồi, góp phần làm tăng độ cứng tổng thể của vỏ và kết quả là lực ổn định tăng. Qua đó có thể điều khiển độ cứng của vỏ bằng cách cho chúng tựa trên các nền đàn hồi có độ cứng khác nhau,

Bảng 3. Lực ổn định không thứ nguyên $\bar{\lambda}_N$ của CCCC/2D-FGP vỏ micro với các thông số thay đổi khác nhau

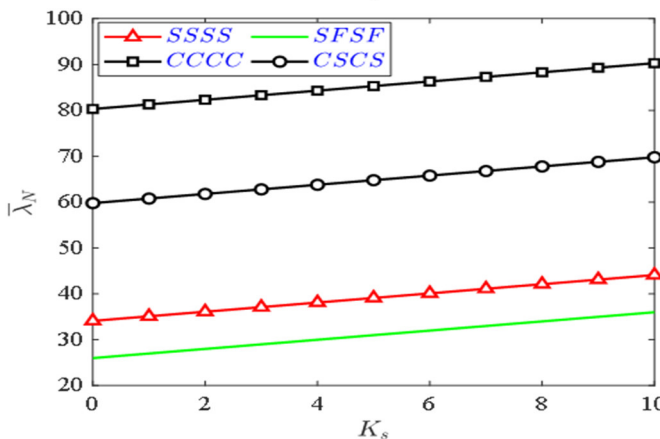
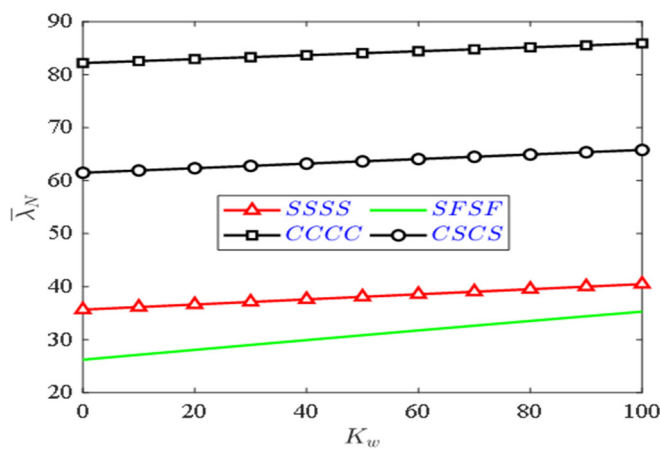
Kiểu vỏ	Loại	l/h	$\alpha_x = \alpha_z = \alpha$					
			0	0,5	1	2	5	10
Vỏ cầu	E	0	62,5071	45,0540	39,4487	35,7216	33,5396	33,0713
		0,5	105,8318	62,0608	50,6385	43,5953	39,7346	38,9175
		1	233,6092	111,1262	83,0330	66,6746	58,0427	56,1869
	U	0	65,2191	47,6858	41,9958	38,1611	35,8807	35,3791
		0,5	114,2380	67,7051	55,5292	47,9649	43,7485	42,8229
		1	258,9718	125,6599	94,8399	76,7497	67,0109	64,8238
Vỏ trụ	E	0	55,2446	39,3832	34,3712	31,0414	29,0697	28,6327
		0,5	98,0380	56,1217	45,4072	38,8111	35,1610	34,3662
		1	225,5402	104,9565	77,6386	61,7534	53,3143	51,4634
	U	0	57,6029	41,6607	36,5647	33,1247	31,0524	30,5845
		0,5	106,0662	61,3901	49,9249	42,8070	38,8007	37,8991
		1	250,5284	119,1087	89,0621	71,4427	61,8971	59,7166
Vỏ yên ngựa	E	0	49,6755	34,9788	30,4529	27,4725	25,6577	25,2270
		0,5	92,2840	51,6523	41,4570	35,2124	31,7113	30,9195
		1	219,7073	100,4494	73,6651	58,1183	49,8087	47,9548
	U	0	51,7748	36,9892	32,3802	29,2957	27,3841	26,9209
		0,5	100,0458	56,6453	45,7011	38,9420	35,0889	34,1888
		1	244,4335	114,3230	84,8101	67,5369	58,1260	55,9410
Tấm phẳng	E	0	39,9127	27,3070	23,5848	21,1576	19,6417	19,2552
		0,5	82,3697	43,9227	34,6010	28,9240	25,6936	24,9267
		1	209,7389	92,6937	66,8468	51,8756	43,7907	41,9313
	U	0	41,5646	28,8746	25,0681	22,5268	20,9082	20,4950
		0,5	89,6783	48,4642	38,3952	32,1968	28,6104	27,7398
		1	234,0179	106,1116	77,5350	60,8329	51,6473	49,4615



Hình 2. Ảnh hưởng của nhiệt độ và điều kiện biên đến lực mất ổn định của vỏ cầu kích thước micromet



Hình 3. Ảnh hưởng của lỗ rỗng và điều kiện biên đến lực mất ổn định của vỏ cấu kích thước micromet



Hình 4. Ảnh hưởng của nền đàn hồi và điều kiện biên đến lực mất ổn định của vỏ cấu kích thước micromet

5. KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này, phương pháp đẳng hình học được phát triển để phân tích ổn định của vỏ micro có cơ tính thay đổi theo hai phương dựa vào lý thuyết cặp ứng suất đôi sửa đổi với điểm mới là hệ số tỷ lệ chiều dài thay đổi như cơ tính vật liệu. Các nghiên cứu chỉ ra rằng, lực ổn định có xu hướng tăng lên theo sự gia tăng của hệ số tỷ lệ chiều dài. Trong khi đó sự tăng lên của hệ số mũ thể tích, độ chênh lệch nhiệt độ và lỗ rỗng luôn làm giảm độ cứng của kết cấu vỏ, dẫn đến giảm lực ổn định một cách nhanh

chóng và có thể kiểm soát được sự tăng giảm này. Sự thay đổi các điều kiện biên khác nhau sẽ cho các dải lực ổn định và các hình dạng mất ổn định khác nhau. Ngoài ra, độ cứng nền đàn hồi có vai trò quan trọng trong quá trình làm việc của vỏ, nó giúp vỏ trở lên cứng vững hơn đáng kể. Các kết quả này với mong muốn đóng góp một phần hiểu biết của bài báo vào hiểu biết chung cho kết cấu micro có cơ tính biến thiên theo hai phương.

LỜI CẢM ƠN

Nhóm tác giả cảm ơn sự hỗ trợ của Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội trong nghiên cứu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Huu-Tai Thai, Dong-Ho Choi, "Size-dependent functionally graded Kirchhoff and Mindlin plate models based on a modified couple stress theory," *Composite Structures* 95, 142-153, 2013.
- [2]. NT Dung, VK Tran, TTH Huyen, P Van Minh, "Nonlinear static bending analysis of microplates resting on imperfect two-parameter elastic foundations using modified couple stress theory," *Comptes Rendus. Mécanique*, 350 (G1), 121-141, 2022.
- [3]. G. C. Tsiatas, "A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory," *International Journal of Solids and Structures* 46 (13), 2757-2764, 2009.
- [4]. L. Yin, Q. Qian, L. Wang, W. Xia, "Vibration analysis of microscale plates based on modified couple stress theory," *Acta Mechanica Solida Sinica* 23 (5), 386-393, 2010.
- [5]. H. M. Ma, X.L. Gao, J. N. Reddy, "A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory," *Acta Mechanica* 220 (1-4), 217-235, 2011.
- [6]. J.N. Reddy, J. Berry, "Nonlinear theories of axisymmetric bending of functionally graded circular plates with modified couple stress," *Composite Structures* 94 (12), 3664-3668, 2012.
- [7]. J. Kim, J.N. Reddy, "A general third-order theory of functionally graded plates with modified couple stress effect and the von Karman nonlinearity: theory and finite element analysis," *Acta Mechanica* 226 (9), 2973-2998, 2015.
- [8]. V. P. Nguyen, C. Anitescu, S. P. A. Bordas, T. Rabczuk, "Isogeometric analysis: An overview and computer implementation aspects," *Math. Comput. Simul.*, 117, 89-116, 2015. doi: 10.1016/j.matcom.2015.05.008.
- [9]. B. Jüttler, U. Langer, A. Mantzaflaris, S. E. Moore, W. Zulehner, "Geometry + Simulation Modules: Implementing Isogeometric Analysis," *Pamm*, 14(1), 961-962, 2014. doi: 10.1002/pamm.201410461.
- [10]. B. Marussig, T. J. R. Hughes, "A Review of Trimming in Isogeometric Analysis: Challenges, Data Exchange and Simulation Aspects," *Arch. Comput. Methods Eng.*, 25(4), 1059-1127, 2018. doi: 10.1007/s11831-017-9220-9.
- [11]. T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs, "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 194(39-41), 4135-4195, 2005. doi: 10.1016/j.cma.2004.10.008.
- [12]. T. J. R. Hughes, A. Reali, G. Sangalli, "Duality and unified analysis of discrete approximations in structural dynamics and wave propagation: Comparison of p-method finite elements with k-method NURBS," *Comput.*

Methods Appl. Mech. Eng., 197(49–50), 4104–4124, 2008. doi: 10.1016/j.cma.2008.04.006.

[13]. Cottrell J. A., Reali A., Bazilevs Y., Hughes T. J. R., "Isogeometric analysis of structural vibrations," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 195(41–43), 5257–5296, 2006.

[14]. D. Shahsavari, B. Karami, H. R. Fahham, L. Li, "On the shear buckling of porous nanoplates using a new size-dependent quasi-3D shear deformation theory," *Acta Mech.*, 229(11), 4549–4573, 2018. doi: 10.1007/s00707-018-2247-7.

[15]. A. Karamanli, T.P. Vo, "Size dependent bending analysis of two directional functionally graded microbeams via a quasi-3D theory and finite element method," *Compos. B Eng.*, 144, 171 – 183, 2018.

[16]. Yang F, Chong ACM, Lam DCC, Tong P., "Couple stress based strain gradient theory for elasticity," *Int J Solids Struct* 39:2731–43, 2002.

[17]. Tran Van-Ke, Quoc-Hoa Pham, Trung Nguyen-Thoi, "A finite element formulation using four-unknown incorporating nonlocal theory for bending and free vibration analysis of functionally graded nanoplates resting on elastic medium foundations," *Engineering with Computers*, 1-26, 2020.

[18]. Hoang X. Nguyen, Tuan N. Nguyen, M. Abdel-Wahab, S.P.A. Bordas, H. Nguyen-Xuan, Thuc P. Vo, "Isogeometric analysis for functionally graded microplates based on modified couple stress theory," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 313, 904 – 940, 2017.

AUTHORS INFORMATION

Khuat Duc Duong¹, Dao Nhu Mai², Nguyen Tuan Linh¹, Tran Thi Thu Thuy¹

¹Hanoi University of Industry, Vietnam

²Institute of Mechanics, Vietnam Academy of Science and Technology, Vietnam