TÍNH GIẢI ĐƯỢC ĐỊA PHƯƠNG VÀ TOÀN CỤC CHO MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐỊA PHƯƠNG PHI TUYẾN

LOCAL AND GLOBAL SOLVABILITY FOR A CLASS OF NONLOCAL DIFFERENTIAL EQUATION PERTURBED BY NONLINEARITY

Lâm Trần Phương Thủy[1,*]

DOI: https://doi.org/10.57001/huih5804.2023.127

TÓM TẮT

Trong bài báo này chúng tôi xét một lớp phương trình vi phân địa phương phi tuyến sau: $\partial_t u+\partial_t\left[k*A^\gamma u\right]+Au=f(t,u)$ với điều kiện đầu u(0) = ψ, trong không gian Hilbert tách được. Sử dụng lý thuyết về hàm hoàn toàn dương và phương pháp điểm bất động, tác giả chứng minh được sự tồn tại nghiệm nhẹ trên đoạn hữu hạn và trên đoạn compact với các giả thiết khác nhau cho phần phi tuyến. Kết quả thu được có thể áp dụng cho một số hệ cụ thể và làm tiền đề cho các nghiên cứu tiếp theo về tính ổn định và chính quy của nghiệm.

Từ khóa: *Phương trình vi phân không địa phương, sự tồn tại nghiệm địa phương, sự tồn tại nghiệm toàn cục.*

ABSTRACT

In this paper, we consider the following equation perturbed by the nonlinearity $\partial_t u+\partial_t\left[k*A^\gamma u\right]+Au=f(t,u)$ with initial u(0) = ψ in an arbitrary separable Hilbert space H. By using theory about completely functions and fixed point arguments, author proves the local existence and the global existence due to different assumptions imposed on f. The obtained results can be applied to some concrete systems, and they are used to make the next study such as studying on stability or regularity.

Keywords: *Nonlocal differential equations, local existence, global existence.*

[1]Trường Đại học Điện lực
[*]Email: thuyltp@epu.edu.vn
Ngày nhận bài: 25/3/2023
Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 25/4/2023
Ngày chấp nhận đăng: 15/6/2023

1. GIỚI THIỆU

Cho H là một không gian Hilbert tách được. Xét bài toán Cauchy:

$$\partial_t u+\partial_t\left[k*A^\gamma u\right]+Au=f(t,u),t>0 \quad (1)$$

với điều kiện ban đầu

$$u(0,x)=\psi(x),x\in\Omega, \quad (2)$$

Trong (1), nhân $k\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ là hàm không âm, $\gamma\in[0;1]$, $f:[0;T]\times H\to H$ là hàm phi tuyến cho trước và hàm ψ là dữ kiện ban đầu của bài toán.

Ký hiệu $*$ là ký hiệu tích chập Laplace với biến thời gian, tức là $(k*v)(t,x)=\int_0^t k(t-s)v(s,x)ds$.

Trước hết ta thấy rằng phương trình (1) khi xét trên $H=L^2(\Omega)$ với Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ với biên đủ trơn và A = -Δ cùng điều kiện biên Dirichlet thì phương trình (1) là mô hình tổng quát cho một số phương trình trong nghiên cứu về động lực học chất lưu. Tiêu biểu là phương trình phản ứng khuếch tán cổ điển phi tuyến (γ = 1 và k là số không âm), phương trình khuếch tán không cổ điển (γ = 1 và $k(\cdot)\in C^1(\mathbb{R}^+)$, xem [3, 4]), phương trình Rayleigh-Stokes suy rộng (γ = 1 và $k(t)=m_0\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},m_0>0$, $\alpha\in(0,1)$, xem [2]) và phương trình Basset (γ = 1 và $k(t)=m_0\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},m_0>0$, $\alpha\in(0,1)$, xem [1]). Như vậy, bài toán đang xét là mô hình tổng quát của một số phương trình đang được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm.

Trong tài liệu [7], các tác giả đã xét bài toán với A = -Δ và phân tích bài toán tuyến tính tương ứng và xét bài toán phi tuyến với hàm phi tuyến dạng f(u). Bài báo đã trình bày về các giải thức sinh ra từ bài toán, công thức nghiệm, chứng minh sự tồn tại khi phần phi tuyến thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương với điều kiện ban đầu đủ nhỏ, nghiên cứu về tính chính qui và ổn định nghiệm cũng như sự hội tụ về điểm cân bằng. Mục đích của chúng tôi là xem xét trên không gian Hilbert với toán tử *A* tổng quát và nghiên cứu bài toán với phần phi tuyến dạng f(t, u). Tác giả xét sự tồn tại địa phương và chứng minh tính giải được toàn cục khi phần phi tuyến thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục do đó ta giải phóng được điều kiện ban đầu đủ nhỏ.

Bài báo trình bày về phương trình tích phân Volterra, công thức nghiệm và các ước lượng cơ bản liên quan đến giải thức sinh ra từ bài toán tuyến tính. Bằng cách dùng lý thuyết về hàm hoàn toàn dương, các ước lượng tiên nghiệm và nguyên lí ánh xạ co Banach tác giả chỉ ra sự tồn tại nghiệm địa phương và sự tồn tại nghiệm toàn cục cho bài toán đang xét. Cuối cùng, tác giả đưa ra một ví dụ minh họa cho kết quả lí thuyết.

2. CƠ SỞ TÍNH TOÁN

Trước hết, ta xét bài toán tuyến tính tương ứng

$$\partial_t u+\partial_t\left[k*A^\gamma u\right]+Au=h(t), t\in(0,T] \tag{3}$$

$$U(0) = \psi \tag{4}$$

Mục đích là tìm nghiệm của hệ này, để đạt được mục đích, chúng ta cần giả thiết sau về toán tử A.

Giả thiết (**A**): *Toán tử A là toán tử tuyến tính xác định dương, tự liên hợp, xác định trù mật với giải thức compact.*

Khi đó, ta xét cơ sở của H gồm các hàm riêng trực chuẩn $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ của toán tử A và

$$Av=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n v_n e_n, \text{ trong đó } Ae_n=\lambda_n e_n,$$

và $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \to \infty$ khi $n \to \infty$.

Ta định nghĩa toán tử lũy thừa của A như sau:

$$A^\beta v=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^\beta (v,e_n)e_n,\ D(A^\beta):=\{v\in H:\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2\beta}(v,e_n)^2<\infty\},$$

với $\beta\in\mathbb{R}$ và $(\cdot,\cdot)$ là ký hiệu tích vô hướng trên không gian Hilbert H và chuẩn sinh ra bởi tích vô hướng là $\|\ \|$.

Giả sử

$$u(t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)e_n,\ \psi=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n e_n,\ h(t)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(t)e_n$$

thay vào (3)-(4), ta được

$$\frac{d}{dt}u_n(t)+\lambda_n u_n(t)+\lambda_n^\gamma\frac{d}{dt}(k*u_n)(t)=h_n(t), t>0 \tag{5}$$

$$U_n(0) = \psi_n \tag{6}$$

Nhằm tìm một biểu diễn cho tọa độ thứ n, ta xét phương trình giảm dư sau đây:

$$\omega'(t)+\mu\omega(t)+\sigma(k*\omega)'=0, t>0$$

$$\omega(0)=1$$

trong đó, μ, σ là các số dương bất kỳ.

Phương trình trên được viết lại ở dạng tích phân như sau:

$$\omega(t)+\mu(1+\frac{\sigma}{\mu}k)*\omega(t)=1, t>0.$$

Nhằm sử dụng lý thuyết về hàm hoàn toàn dương, tác giả cần giả thiết sau về nhân k.

Giả thiết (**K**): $k\in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^+\right)$ là một hàm không âm sao cho hàm 1 + ρk(t) là hàm hoàn toàn dương với mỗi ρ > 0.

Chú ý 1: Nếu $k(t)=k_0 g_{1-\alpha}(t), \alpha\in(0,1)$ thì giả thiết (**K**) được thỏa mãn, ngoài ra nếu k là hàm hoàn toàn đơn điệu thì 1 + ρk(t) cũng hoàn toàn đơn điệu và do đó giả thiết (K) được thỏa mãn (xem [16]).

Nhắc lại rằng, một hàm l được gọi là hoàn toàn dương nếu các nghiệm s và r của phương trình Volterra loại 2

$$s(t)+\eta(l*s)(t)=1, \quad t\ge 0$$

$$r(t)+\eta(l*r)(t)=l(t), \quad t>0$$

nhận giá trị không âm với mọi η > 0. Sự tồn tại nghiệm và tính duy nhất nghiệm đã được chứng minh trong [3].

Như thế, với giả thiết (**K**), thì phương trình giảm dư có nghiệm. Ta ký hiệu nghiệm đó là ω(t, μ, σ). Tính chất của hàm này đóng vai trò quan trọng trong việc chứng minh sự tồn tại nghiệm nhẹ của bài toán ban đầu, vì thế tác giả cần bổ đề sau:

Bổ đề 1. Giả sử (**K**) được thỏa mãn. Khi đó

(a) Hàm ω(., μ, σ) là hàm không tăng trên $\mathbb{R}^+$ và thoả mãn ước lượng sau:

$$0<\omega(t,\mu,\sigma)\le\frac{1}{1+\mu 1*(1+\frac{\sigma}{\mu}k)(t)}, t\ge 0. \tag{7}$$

(b) Ta có: $\int_0^t\omega(\tau,\mu,\sigma)d\tau\le\frac{1}{\mu}\left(1-\omega(t,\mu,\sigma)\right), \forall t\ge 0.$ (8)

(c) Với mỗi số cố định t > 0, hàm $\omega(t,\mu,\mu^\gamma)$ không tăng theo biến μtrên (0, +∞).

Chứng minh: Tương tự như trong [7].

Dựa vào nghiệm của phương trình thuần nhất, chúng ta có nghiệm của phương trình không thuần nhất

$$v'(t)+\mu v(t)+\sigma(k*v)'=g(t), t>0$$

$$v(0)=v_0$$

là

$$v(t)=\omega(t,\mu,\sigma)v_0+\int_0^t\omega(t-\tau,\mu,\sigma)g(\tau)d\tau.$$

Áp dụng kết quả vừa thu được cho hệ (5)- (6), ta được:

$$u_n(t)=\omega(t,\lambda_n,\lambda_n{}^\gamma)\psi_n+\int_0^t\omega(t-\tau,\lambda_n,\lambda_n{}^\gamma)h_n(\tau)d\tau.$$

Từ đây, ta có công thức nghiệm cho bài toán tuyến tính là:

$$u(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega(t,\lambda_n,\lambda_n{}^\gamma)\psi_n e_n+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\omega(t-\tau,\lambda_n,\lambda_n{}^\gamma)h_n(\tau)d\tau e_n \tag{9}$$

Ký hiệu ω(t, λ_n) thay cho $\omega(t,\lambda_n,\lambda_n{}^\gamma)$, và định nghĩa toán tử trên không gian H như sau

$$T(t)\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\omega(t,\lambda_n)\zeta_n e_n,\ \zeta\in H, t\ge 0 \tag{10}$$

Ta được công thức nghiệm cho bài toán tuyến tính như sau

$$u(t)=T(t)\psi+\int_0^t T(t-\tau)h(\tau)d\tau, t\ge 0. \tag{11}$$

Ta gọi toán tử T(t) là toán tử giải thức, một số tính chất phát biểu trong Bổ đề dưới đây sẽ được sử dụng trong việc chứng minh các kết quả chính của bài toán.

Bổ đề 2. Cho $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ là họ các toán tử được định nghĩa bởi (10), $\zeta \in H$ và T > 0. Khi đó

$T(\cdot)\zeta \in C([0,T];H)$ và $\|T(t)\|_{op} \le \omega(t,\lambda_1)$ với mọi $t \ge 0$.

Chứng minh.

Từ (10), ta suy ra

$$\|T(t)\zeta\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\omega^2(t,\lambda_n)\zeta_n^2.$$

Theo Bổ đề 1(c), thì $\omega^2(t,\lambda_n) \le \omega^2(t,\lambda_1), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó

$$\|T(t)\zeta\|^2 \le \omega^2(t,\lambda_1)\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n^2 = \omega^2(t,\lambda_1)\|\zeta\|^2. \tag{12}$$

Từ đây suy ra tính hội tụ đều của chuỗi (1) trên [0, T], kéo theo $T(\cdot)\zeta \in C([0,T];H)$.

Hơn nữa, từ ước lượng (12) ta được $\|T(t)\|_{op} \le \omega(t,\lambda_1)$ với mọi $t \ge 0$.

Dựa vào (11), ta có định nghĩa sau về nghiệm nhẹ của bài toán.

Định nghĩa:

Hàm $u \in C([0,T],H)$ được gọi là nghiệm nhẹ của bài toán (1) - (2) trên [0, T] nếu và chỉ nếu: với $t \in [0,T]$,

$$u(t) = T(t)\psi + \int_0^t T(t-\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau \tag{13}$$

Cuối cùng, tác giả nhắc lại nguyên lí ánh xạ co Banach.

Nguyên lí ánh xạ co Banach. (Xem [5]). Cho (X, d) là một không gian metric đủ và f: X → X là một toán tử co, tức là tồn tại số $\lambda \in (0,1)$ sao cho $d(f(x),f(y)) \le \lambda d(x,y), \forall x,y \in X$. Khi đó tồn tại duy nhất một phần tử $p \in X$ sao cho f(p) = p.

3. TÍNH GIẢI ĐƯỢC

Trong phần này chúng tôi đưa ra điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm địa phương và sự tồn tại nghiệm toàn cục.

3.1. Tính giải được địa phương

Với giả thiết hàm phi tuyến thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương và điều kiện đầu bất kì, ta có tính giải được địa phương được trình bày trong định lí dưới đây.

Định lí 3.1. Giả sử các giả thiết **(K)** và **(A)** được thỏa mãn. Hàm phi tuyến liên tục và thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương:

$$\| f(t,v_1) - f(t,v_2) \| \le L(\rho)\| v_1 - v_2 \|,$$

với mọi $v_1, v_2 \in B_\rho, t \ge 0$, trong đó B_ρ là hình cầu đóng tâm tại gốc và bán kính ρ. Khi đó tồn tại số $t^* \in (0,T)$ sao cho bài toán (1)-(2) có nghiệm trên [0, t^*].

Chứng minh: Xét ánh xạ như sau

$$\mathcal{F}(u)(t) := T(t)\psi + \int_0^t T(t-\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau$$

trên C[(0, T), H]. Lấy $\rho > \|\psi\|$ và $u \in B_\rho$ là hình cầu tâm tại gốc và

$$\|\mathcal{F}(u)(t)\| \le \omega(t,\lambda_1)\|\psi\| + \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)\|f(\tau,u(\tau))\|d\tau$$

$$\le \|\psi\| + \left[L(\rho)\rho + \sup_{[0,T]}\|f(t,0)\|\right]\frac{1-\omega(t,\lambda_1)}{\lambda_1}$$

vì $\omega(t, \lambda_1)$ là hàm giảm và $\omega(0, \lambda_1) = 1$, nên tồn tại $t_0^* \in (0,T)$ sao cho $\mathcal{F}(B_\rho) \subset B_\rho$, với $B_\rho \subset C([0,t_0^*],H)$.

Tiếp theo, với mọi $t \in [0,t_0^*]$, ta có:

$$\|\mathcal{F}(u_1)(t) - \mathcal{F}(u_2)(t)\| \le \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)\|f(\tau,u_1(\tau)) - f(\tau,u_1(\tau))\|d\tau$$

$$\le \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)L(\rho)\|u_1 - u_2\|d\tau$$

$$= L(\rho)\|u_1 - u_2\|\frac{1-\omega(t,\lambda_1)}{\lambda_1}.$$

Lấy $t^* \in (0,t_0^*]$ sao cho:

$$L(\rho)\frac{1-\omega(t,\lambda_1)}{\lambda_1} < 1, \forall t \in [0,t^*]$$

Ta được $\mathcal{F}$ là ánh xạ co trên $B_\rho \subset C([0,t^*];H)$. Vậy bài toán có duy nhất nghiệm trên [0, t^*].

3.2. Tính giải được toàn cục

Trong kết quả dưới đây, ta sử dụng chuẩn tương đương để thu được tính giải được toàn cục khi hàm phi tuyến thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục.

Định lí 3.2. Giả sử các giả thiết **(K)** và **(A)** được thỏa mãn. Hàm phi tuyến liên tục và thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục sau:

$$\| f(t,v_1) - f(t,v_2) \| \le L(t)\| v_1 - v_2 \|,$$

với mọi $v_1, v_2 \in H, t \ge 0$, trong đó $L \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ là hàm cho trước sao cho

$$\lim_{\eta\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t e^{-\eta(t-\tau)}\omega(t-\tau,\lambda_1)L(\tau)d\tau = 0 \ (*).$$

Khi đó bài toán (1)-(2) có nghiệm duy nhất trên [0, T].

Chú ý 2: Nếu $\omega(t-\cdot,\lambda_1)L(\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, thì (*) thỏa mãn (xem Bổ đề 2.7 trong [6]).

Chứng minh.

Đặt $\|v\|_\eta = \sup_{[0,T]} e^{-\eta t}\|v(t)\|$ với $v \in C([0,T];H)$, và η > 0 sao cho

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t e^{-\eta(t-\tau)}\omega(t-\tau,\lambda_1)L(\tau)d\tau<1,$$

ở đây sự tồn tại η > 0 là dựa vào giả thiết (*), ta thu được chuẩn tương đương với chuẩn sup trên không gian C([0, T]; H).

Xét ánh xạ như sau

$$\mathcal{F}(u)(t):=T(t)\psi+\int_0^t T(t-\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau \text{ trên } C([0, T]; H).$$

Mỗi điểm bất động của ánh xạ chính là nghiệm của bài toán. Để chứng minh bài toán có nghiệm duy nhất, ta sẽ chỉ ra nó là ánh xạ co. Thật vậy, với mọi $u_1,u_2\in C([0,T],H)$ ta có:

$$\left\|\mathcal{F}(u_1)(t)-\mathcal{F}(u_2)(t)\right\|\le\int_0^t\omega(t-\tau,\lambda_1)\left\|f(\tau,u_1(\tau))-f(\tau,u_1(\tau))\right\|d\tau$$

$$\le\int_0^t\omega(t-\tau,\lambda_1)L(\tau)\left\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\right\|d\tau$$

$$\le\int_0^t\omega(t-\tau,\lambda_1)L(\tau)\sup_{\theta\in[0,\tau]}\left\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\right\|d\tau$$

$$\le\int_0^t e^{\eta\tau}\omega(t-\tau,\lambda_1)L(\tau)\sup_{\theta\in[0,\tau]}e^{-\eta\theta}\left\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\right\|d\tau$$

$$\le\left\|u_1-u_2\right\|_\eta\int_0^t e^{\eta\tau}\omega(t-\tau,\lambda_1)L(\tau)d\tau.$$

Từ đó suy ra

$$\sup_{t\in[0,T]}e^{-\eta t}\left\|\mathcal{F}(u_1)(t)-\mathcal{F}(u_2)(t)\right\|$$

$$\le\left\|u_1-u_2\right\|_\eta\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t e^{-\eta(t-\tau)}\omega(t-\tau,\lambda_1)L(\tau)d\tau.$$

Tức là

$$\left\|\mathcal{F}(u_1)-\mathcal{F}(u_2)\right\|_\eta\le\rho\left\|u_1-u_2\right\|_\eta,$$

với $\rho=\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t e^{-\eta(t-\tau)}\omega(t-\tau,\lambda_1)L(\tau)d\tau<1$. Ta được $\mathcal{F}$ là ánh xạ co trên C([0, T]; H).

Vậy bài toán có duy nhất nghiệm trên [0, T].

3.3. Ví dụ minh họa

Xét hệ sau

$$\begin{cases}\partial_t u(t,y)+{}^cD_t^{\frac{1}{2}}u(t,y)=\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}u(t,y)\\ +\alpha\sin u(t,y)+\cos 2\pi t,\ t\in J,\ y\in[0,\pi]\\ u(t,0)=u(t,\pi)=0,\ \ t\in J\\ u(0,y)=u_0(y),\quad y\in[0,\pi]\end{cases}$$

với $\alpha\in\mathbb{R}$ và J = [0, T].

Đặt $H=L^2[0,\pi]$. Định nghĩa toán tử $A:D(A)\subseteq H\to H$ bởi $Au=-\dfrac{d^2u}{dy^2}$, $D(A)=\left\{u\in H \,|\, \dfrac{du}{dy},\dfrac{d^2u}{dy^2}\in H, u(0)=u(\pi)=0\right\}$

Khi đó, theo [8], thì A là toán tử sinh của C_o nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\ge0}$ compact trong H và A xác định bởi $Au=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\langle u,e_n\rangle e_n$, giả thiết (**A**) được thỏa mãn với $\lambda_n=n^2$ và $e_n(y)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin ny$.

Hàm $k(t)=g_{\frac{1}{2}}(t)$, theo **Chú ý 1** thì giả thiết (**K**) được thỏa mãn.

Cuối cùng $f(t,u)=\alpha\sin u+\cos 2\pi t$, thì ta có $L(t)=|\alpha|,\forall t\in J$. Theo **Định lí 3.2**, thì bài toán có nghiệm toàn cục.

4. KẾT LUẬN

Bằng cách sử dụng chuẩn tương đương và sử dụng nguyên lí ánh xạ co Banach, tác giả đã chỉ ra điều kiện đủ để bài toán (1)-(2) có nghiệm toàn cục khi hàm phi tuyến thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục, tác giả đưa ra một ví dụ minh họa cho kết quả lí thuyết. Ngoài ra, với giả thiết hàm phi tuyến thỏa mãn điều kiện Lipschitz cục bộ thì bài toán có nghiệm cục bộ. Các kết quả không cần điều kiện ban đầu đủ nhỏ. Hướng phát triển tiếp theo của nghiên cứu này là tìm hiểu về tính chính qui và ổn định nghiệm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. A. Allaberen, 2011. *Well-posedness of the Basset problem in spaces of smooth functions.* Appl. Math. Lett., 24, 1176–1180.

[2]. E. Bazhlekova, B. Jin, R. Lazarov, Z. Zhou, 2015. *An analysis of the Rayleigh-Stokes problem for a generalized second-grade fluid*. *Numer. Math.*, 131**,** 1–31.

[3]. P. Cannarsa, H. Frankowska, E. M. Marchini, 2013. *Optimal control for evolution equations with memory*. J. Evol. Equ., 13**,** 197–227.

[4]. J. R. Cannon, Y.P. Lin, 1990. *A priori* L2 *error estimates for fnite-element methods for nonlinear diffusion equations with memory.* SIAM J. Numer. Anal., 27**,** 595–607.

[5]. Ciesielski, Krzysztof, 2007. *On Stefan Banach and some of his results.* Banach J. Math. Anal. 1 (1): 1–10.

[6]. K. Ezzinbi, S. Ghnimi, M.A. Taoudi, 2019. *Existence results for some nonlocal partial integro differential equations without compactness or equicontinuity*, J. Fixed Point Theory Appl. 21, no. 2

[7]. Tran Dinh-Ke, Nguyen Nhu-Thang, 2022. *On regularity and stability for a class of nonlocal evolution equations with nonlinear perturbations.* Communications on Pure & Applied Analysis 21 (3), 817-835.

[8]. I. I Vrabie, 2003. *C_o-semigroups and Applications.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

AUTHOR INFORMATION

Lam Tran Phuong Thuy

Electric Power University, Vietnam