

PHÂN TÍCH ĐÁP ỨNG ĐỘNG LỰC HỌC KHUNG THÉP VÁT CÓ LIÊN KẾT NỬA CỨNG CHỊU TẢI TRỌNG GIÓ

DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS OF BEVELED STEEL FRAMES WITH SEMI-RIGID CONNECTIONS EXPOSED TO WIND LOADS

Phạm Trung Thành^{1,*},
Nguyễn Hồng Sơn², Vũ Thành Trung¹

TÓM TẮT

Bài báo này trình bày phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích động lực học khung vát có liên kết nửa cứng chịu tác dụng của tải trọng gió. Ma trận độ cứng của khung thép được xây dựng theo phương pháp năng lượng. Ma trận khối lượng được xây dựng dựa trên các hàm dạng của phần tử thanh vát có liên kết nửa cứng. Liên kết nửa cứng ở hai đầu phần tử thanh được mô phỏng bằng lò xo với độ cứng chống uốn đàn hồi. Các đặc trưng hình học của tiết diện chữ I được biểu diễn qua hàm số mũ cơ số "e". Mô hình tải trọng gió được đo đạc tại hai địa điểm tại Lang Cang và Điện Biên. Sử dụng tích phân trực tiếp Newmark để suy ra các đáp ứng động lực học của khung vát. Độ chính xác của phương pháp được kiểm chứng thông qua các so sánh số tin cậy, từ đây ảnh hưởng của liên kết nửa cứng và mô hình tải trọng gió đến đáp ứng động lực học của khung vát được trình bày.

Từ khóa: Liên kết nửa cứng, động lực học khung thép vát, tích phân Newmark.

ABSTRACT

The purpose of this article is to demonstrate how to use the finite element method to analyze the dynamics of chamfer frames with semi-rigid connections that are exposed to wind loads. The energy approach is used to generate the steel frame's stiffness matrix. The mass matrix is generated using the chamfer element's form functions and semi-rigid connections. The semi-rigid connection at the rod element's ends is represented by an elastic spring with bending stiffness. An exponential function with base "e" is used to illustrate the geometrical properties of the I cross section. Two locations in Lang Cang and Dien Bien were used to calibrate the wind load model. Calculate the dynamic responses of the chamfer frame using the Newmark direct integral. The method's accuracy is validated using accurate numerical comparisons. From then, the effect of the semi-rigid connection and wind load model on the chamfer frame's dynamic response is discussed.

Keywords: Semi-rigid connections, chamfered steel frame dynamics, Newmark integrals.

¹Viện Khoa học Công nghệ xây dựng

²Trường Đại học Kiến Trúc Hà Nội

*Email: phamthanh.ibst@gmail.com

Ngày nhận bài: 02/01/2022

Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 15/02/2022

Ngày chấp nhận đăng: 25/02/2022

1. GIỚI THIỆU

Đối với kết cấu khung thép sử dụng khá nhiều loại cấu kiện tiết diện chữ I có kích thước bản cánh và chiều dày bản bụng không đổi, còn chiều cao tiết diện thay đổi theo chiều

dài thanh. Mức độ thay đổi chiều cao tiết diện phụ thuộc vào phân bố nội lực trong thanh theo chiều dài, điều kiện liên kết ở hai đầu. Gần đây, một số tài liệu trong và ngoài nước có đề cập đến việc thiết lập các ma trận độ cứng [1-3], ma trận khối lượng [4] của phần tử thanh tiết diện thay đổi, nhưng dành cho tiết diện chữ nhật với chiều cao thay đổi tuyến tính hoặc việc xây dựng chúng trên cơ sở hàm dạng của phần tử thanh tiết diện đều và cho các kết quả tính gần đúng. Do vậy, cần thiết xây dựng ma trận độ cứng, ma trận khối lượng cho loại cấu kiện này theo một phương pháp chính xác và tổng quát hơn.

Trên thế giới, Rezaiee-Pajand và M. Moayedian [7] đã xây dựng công thức xác định độ cứng của dầm chữ I tiết diện vát bằng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH). Trong khi, Samson Takele [8] xây dựng ma trận độ cứng của dầm tiết diện bất kỳ. Al-Fatlawi [9] nghiên cứu dao động tự do của dầm hộp tiết diện vát sử dụng phần mềm NASTRAN. Zhang và Tong [10] nghiên cứu mất ổn định cánh của dầm chữ I tiết diện vát sử dụng phần mềm ANSYS. Louie [11] cung cấp công thức xác định độ cứng cho dầm 2D tiết diện vát trong nghiên cứu của mình. Zeinali [12] đã phân tích dao động của dầm tiết diện vát sử dụng hàm đa thức Chebyshev.

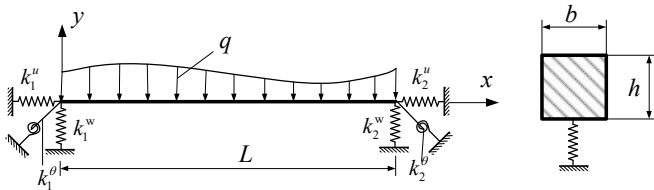
Trong nước, nghiên cứu ứng xử cơ học của khung thép cũng được các nhà khoa học quan tâm nghiên cứu từ những năm 2000. Có thể kể đến một số tác giả như: Vũ Quốc Anh [13] đã xuất bản cuốn sách "tính toán và thiết kế khung thép liên kết đàn hồi" tại Nhà xuất bản Xây dựng làm tài liệu tham khảo cho kỹ sư, cán bộ kỹ thuật, cán bộ nghiên cứu ngành xây dựng khi tính toán và thiết kế khung thép với liên kết đàn hồi cho những công trình thực tế. Trước đó, Nguyễn Hồng Sơn [14] đã phân tích dao động của khung thép phẳng liên kết nửa cứng phi tuyến kể đến biến dạng dẻo chịu tác động đồng thời của nhiều tải trọng bằng phương pháp PTHH.

Từ việc phân tích các tài liệu trên, có thể thấy rằng, chưa có công trình nào nghiên cứu ứng xử khung thép vát liên kết nửa cứng chịu tải trọng động. Do đó, mục tiêu chính của bài báo là thiết lập công thức và thuật toán PTHH giải quyết bài toán này

2. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Xét phần tử dầm có chiều dài L với các đặc trưng tiết diện I, G, A thay đổi theo chiều dài dầm. Chiều dày dầm

thay đổi theo quy luật $h = h(x)$ với đầu 1 và 2 liên kết nửa cứng được mô hình hóa bằng các lò xo, với độ mềm cho chuyển vị dọc trục là k_1^u, k_2^u cho chuyển vị thẳng đứng là k_1^w, k_2^w và cho chuyển vị xoay là k_1^θ, k_2^θ như hình 1.



Hình 1. Mô hình dầm tiết diện không đều chịu liên kết nửa cứng

Theo lý thuyết dầm Timoshenko, trường chuyển vị của một điểm bất kỳ có tọa z được biểu diễn như sau:

$$u = u_0 + z\theta_x; w = w_0 \tag{1}$$

trong đó: u_0, w_0 lần lượt là chuyển vị theo phương dọc trục và phương thẳng đứng; θ_x là góc xoay của dầm trong mặt phẳng xz . Nếu bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt thì

$$\theta_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$$

Trường biến dạng được xác định bởi biểu thức:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}; \epsilon_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \tag{2}$$

Quan hệ ứng suất - chuyển vị của dầm được biểu diễn bởi công thức:

$$\sigma_{xx} = E \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right); \tau_{xz} = G \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \right) \tag{3}$$

Các thành phần nội lực bao gồm lực màng \mathbf{N} , lực cắt \mathbf{Q} và mô men uốn \mathbf{M} được tính thông qua công thức (3):

$$\mathbf{N} = b \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_{xx} dz = A \frac{\partial u_0}{\partial x} + B \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \tag{4}$$

$$\mathbf{M} = b \int_{-0,5h}^{0,5h} z \sigma_{xx} dz = B \frac{\partial u_0}{\partial x} + D \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \tag{5}$$

$$\mathbf{Q} = k_s b \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_{xz} dz = A_s \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \right) \tag{6}$$

trong đó: A, B, D, A_s là các thành phần độ cứng của vật liệu và được xác định bởi:

$$(A, B, D) = b \int_{-0,5h}^{0,5h} E(1, z, z^2) dz, A_s = bk_s \int_{-0,5h}^{0,5h} G dz \tag{7}$$

Theo nguyên lý Hamilton's [3, 4], phương trình chuyển động của dầm được xác định như sau:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + T - K + W) dt = 0 \tag{8}$$

trong đó: U, T, K và W lần lượt là thế năng biến dạng, thế năng đàn hồi của lò xo liên kết nửa cứng, động năng và công của lực ngoài tác dụng lên dầm.

Thế năng biến dạng của dầm được xác định như sau:

$$U = \frac{1}{2} \int_L \left(N \frac{\partial u_0}{\partial x} + M \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + Q \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \right) \right) dx \tag{9}$$

Thế năng đàn hồi của lò xo liên kết nửa cứng được xác định bởi [3, 4].

$$T = \frac{1}{2} \left(k_1^u u_0^2 + k_1^w w_0^2 + k_1^\theta \theta_x^2 \right)_{x=0} + \frac{1}{2} \left(k_2^u u_0^2 + k_2^w w_0^2 + k_2^\theta \theta_x^2 \right)_{x=L} \tag{10}$$

Động năng của dầm được suy ra từ biểu thức [3, 4]:

$$K = \frac{1}{2} \int_L \left(J_0 (\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + 2J_1 \dot{u}_0 \dot{\theta}_x + J_2 \dot{\theta}_x^2 \right) dx \tag{11}$$

trong đó: $(\dot{\cdot})$ là đạo hàm bậc một theo thời gian t ; J_0, J_1 và J_2 lần lượt là các mô men quán tính của dầm và được xác định bởi công thức:

$$(J_0, J_1, J_2) = b \int_{-0,5h}^{0,5h} \rho(1, z, z^2) dz \tag{12}$$

Công của ngoại lực tác dụng lên dầm là:

$$W = \frac{1}{2} \int_L \left(-q(x)w_0 + P_0 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right) dx \tag{13}$$

với $q(x)$ và P_0 lần lượt là lực tác dụng lên dầm theo phương thẳng đứng và phương dọc trục dầm. Vì chiều dày của dầm thay đổi theo phương ngang, do đó các công thức (7) và (12) đều là hàm phụ thuộc vào biến chiều dài x .

Thay thế các công thức (9)-(11) và (13) vào công thức (8), sau đó tích phân từng phần, ta có:

$$\int_L \left(N \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + M \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} + Q \left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \delta \theta_x \right) \right) dx + \left(k_1^u u_0 \delta u_0 + k_1^w w_0 \delta w_0 + k_1^\theta \theta_x \delta \theta_x \right)_{x=0} + \int_L \left(-q(x) \delta w_0 + P_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) dx + \left(k_2^u u_0 \delta u_0 + k_2^w w_0 \delta w_0 + k_2^\theta \theta_x \delta \theta_x \right)_{x=L} - \int_L \left(J_0 (u_0 \delta \ddot{u}_0 + w_0 \delta \ddot{w}_0) + J_1 (u_0 \delta \ddot{\theta}_x + \theta_x \delta \ddot{u}_0) + J_2 \phi_x \delta \ddot{\theta}_x \right) dx = 0 \tag{14}$$

Trong nghiên cứu này, phần tử dầm 2 nút, mỗi nút có 3 bậc tự do được sử dụng. Bậc tự do của phần tử dầm được xác định bởi:

$$\mathbf{q}_e = \{ u_{01} \quad w_{01} \quad \phi_{x1} \quad u_{02} \quad w_{02} \quad \phi_{x2} \}^T \tag{15}$$

ở đây: T là ma trận chuyển, sử dụng hàm dạng Lagrange và Hermite, trường chuyển vị của phần tử dầm được xấp xỉ thông qua các bậc tự do và hàm dạng như sau:

$$u_0 = N_{u1} u_{01} + N_{u2} w_{01} + N_{u3} \phi_{x1} + N_{u4} u_{02} + N_{u5} w_{02} + N_{u6} \phi_{x2} = \mathbf{N}_u \mathbf{q}_e \tag{16}$$

$$w_0 = N_{w1}u_{01} + N_{w2}w_{01} + N_{w3}\varphi_{x1} + N_{w4}u_{02} + N_{w5}w_{02} + N_{w6}\varphi_{x2} = N_w q_e \quad (17)$$

$$\theta_x = N_{\varphi1}u_{01} + N_{\varphi2}w_{01} + N_{\varphi3}\varphi_{x1} + N_{\varphi4}u_{02} + N_{\varphi5}w_{02} + N_{\varphi6}\varphi_{x2} = N_{\varphi} q_e \quad (18)$$

trong đó các hàm dạng $N_{ui}, N_{wi}, N_{\varphi i}$ được như trong [4]:

Thay thế các công thức (16)-(18) vào công thức (14), ta thu được công thức PTHH mô tả phương trình dao động cưỡng bức dầm như sau:

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = F(t) \quad (19)$$

trong đó: $M = \sum_{ne} M_e, K = \sum_{ne} K_e + K_{bien}, F = \sum_{ne} F_e$ tương ứng

là ma trận khối lượng, ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng; M_e, K_e, C_e, F_e , ne lần lượt là ma trận khối lượng, ma trận độ cứng, ma trận độ cản nhớt, véc tơ tải trọng và số phần tử dầm.

Đối với bài toán khung thép phẳng, các công thức PTHH vẫn được xét như bài toán dầm được trình bày ở trên. Chỉ khác là hệ tọa độ địa phương và hệ tọa độ tổng quát của phần tử dầm là song song với nhau nên không cần ma trận chuyển trục tọa độ trong quá trình tính toán. Khi đó hệ tọa độ địa phương và tọa độ tổng thể của khung phẳng là khác nhau, nên cần có ma trận chuyển để đưa tọa độ địa phương về tọa độ tổng thể. Mối quan hệ giữa 2 tọa độ này được biểu diễn như công thức dưới đây:

$$q_e = T_e \bar{q}_e \quad (20)$$

trong đó

\bar{q}_e là véc tơ chuyển vị nút phần tử thanh trong hệ tọa độ địa phương;

q_e là véc tơ chuyển vị nút phần tử thanh trong hệ tọa độ tổng thể;

T_e là ma trận chuyển đổi từ hệ tọa độ địa phương sang hệ tọa độ tổng thể.

$$T_e = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Các ma trận độ cứng, ma trận khối lượng và véc tơ tải trọng tổng thể được tập hợp từ các ma trận, véc tơ phần tử như sau:

$$M = \sum_{ne} T_e^T M_e T_e, K = \sum_{ne} T_e^T K_e T_e + K_{bien}, F = \sum_{ne} T_e^T F_e \quad (22)$$

Phương trình (19) được tính bằng phương pháp tích phân trực tiếp Newmark với các hằng số $\beta = 0,25; \gamma = 0,2$.

3. KẾT QUẢ SỐ

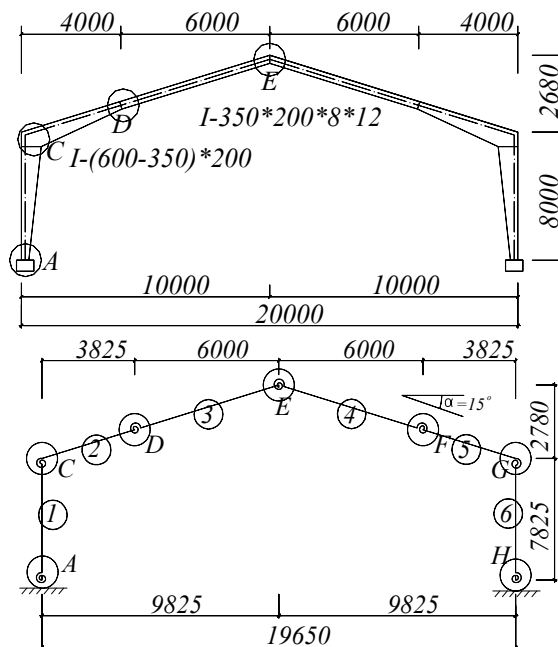
3.1. Lập trình tính toán

Trên sơ sở ma trận độ cứng và ma trận khối lượng đã xây dựng, nhóm tác giả lập chương trình tính dựa trên phần mềm MatLab 2018a có tên DWL-PTT.

3.2. Đánh giá độ chính xác

3.2.1. Tần số dao động riêng của khung thép vát

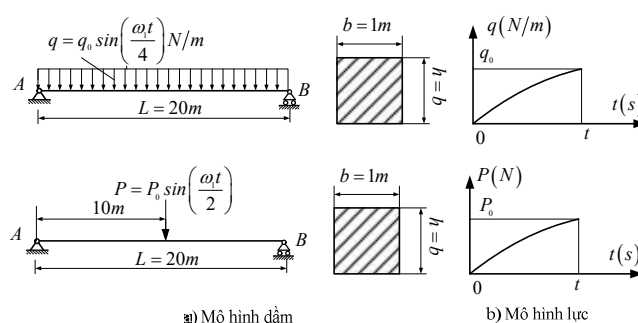
Xác định chu kỳ dao động riêng của khung thép, như hình 2, mô đun đàn hồi $E = 21 \times 10^4 \text{MPa}$, trọng lượng riêng $g = 78,5 \text{kN/m}^3, \nu = 0,3$.



Hình 2. Mô hình khung vát chịu liên kết nửa cứng.

3.2.2. Bài toán đáp ứng động

Xét dầm chịu liên kết tựa đơn 2 đầu có chiều dài $L = 20\text{m}$, tiết diện mặt cắt ngang hình vuông ($b = h = 1\text{m}$) như hình 3, cơ tính của dầm biến thiên theo chiều dài dầm với quy luật được cho như sau: $E(z) = 1 + 3 \cdot (0,5 + z)$ (TPa), $\rho = 1220 \text{kg/m}^3, \nu = 0,38$. Dầm chịu tác dụng của tải tập trung và phân bố đều với cường độ lần lượt là $P = P_0 \sin(0,5\omega_1 t)$ và $q = q_0 \sin(0,25\omega_1 t)$; ω_1 là tần số đầu tiên của kết cấu.

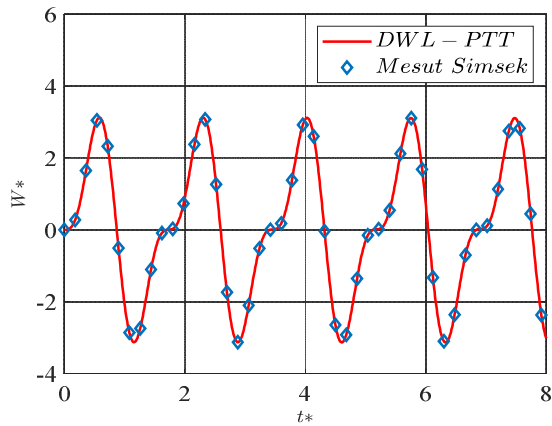


Hình 3. Mô hình dầm chịu tác dụng của tải trọng theo thời gian

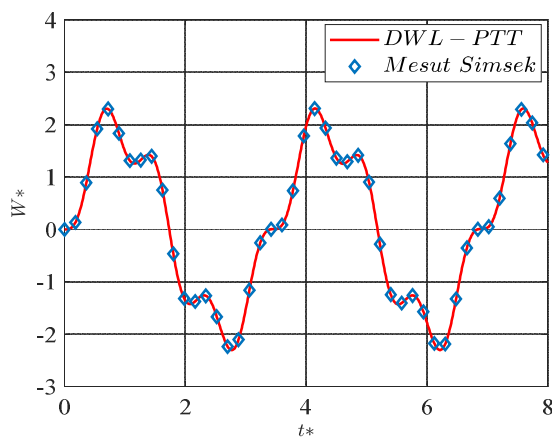
Kết quả chuyển vị thẳng đứng không thứ nguyên $W^* = W_{động}/W_{tĩnh}$ tại điểm giữa dầm so với kết quả trong tài liệu [6] sử dụng phương pháp giải tích của Levy như trên hình 4.

Các kết quả động lực học và dao động riêng của khung thép của bài báo được so sánh với các kết quả thu được từ các lời giải giải tích Levy và phần mềm SAP-2000. Từ các kết quả này, có thể kết luận rằng các công thức và chương

trình tính toán mà bài báo xây dựng đảm bảo độ chính xác và độ tin cậy. Từ đó chương trình này của bài báo được áp dụng để đánh giá các đáp ứng động lực học của hệ khung vát có liên kết nửa cứng.



a) $P = P_0 \sin(0,5\omega_1 t)$

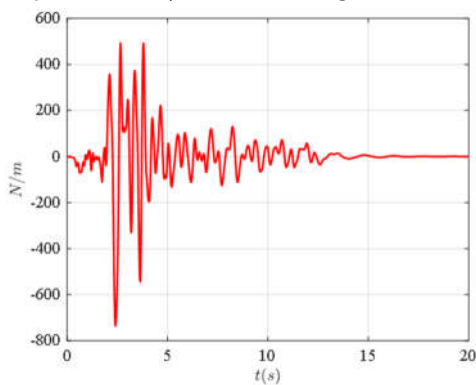


b) $q = q_0 \sin(0,25\omega_1 t)$

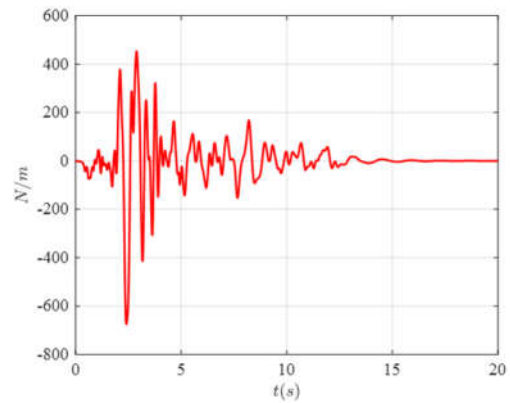
Hình 4. Chuyển vị không thứ nguyên của điểm giữa dầm dưới tác dụng của các loại tải trọng khác nhau

3.3. Khảo sát ảnh hưởng của biên nửa cứng

Sử dụng mô hình khung vát có tiết diện mặt cắt hình chữ I và các thuộc tính cơ học được cho như trên hình 2. Mô hình lực gió tác dụng lên kết cấu được đo theo thời gian được cho dưới dạng các đồ thị hình 5 tại điểm đo Lang Cang và Điện Biên. Tải gió này tác dụng lên khung thép vát coi như tải phân bố thay đổi theo thời gian.



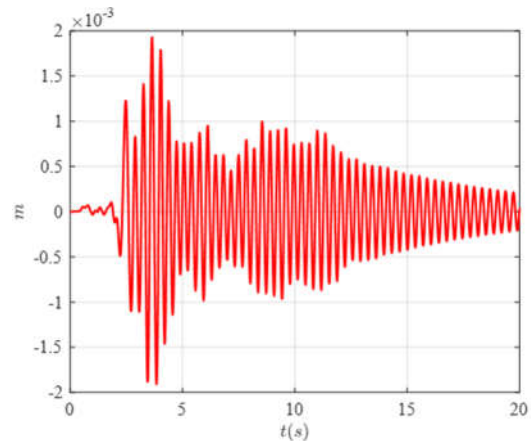
a) Lang Cang



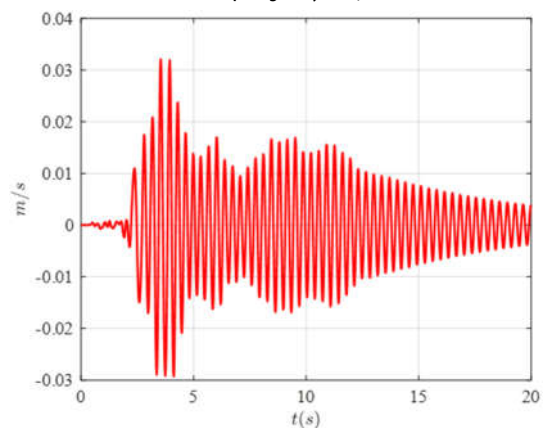
b) Điện Biên

Hình 5. Mô hình lực gió theo thời gian tại Lang Cang và Điện Biên

Các đáp ứng động lực học của khung thép vát dưới tác dụng của tải trọng gió khi độ cứng k của biên nửa cứng của khung vát thay đổi được cho như trên hình 6 - 8 và bảng 1. Ta thấy rằng, khi độ cứng k càng lớn, đáp ứng chuyển vị và vận tốc của điểm số 4 trên khung thép vát càng giảm xuống, điều này được giải thích là độ cứng k lớn nó làm tăng độ cứng tổng thể của khung lên. Tuy nhiên, đến một giá trị k đủ lớn xác định, các đáp ứng chuyển vị và vận tốc sẽ tiến tới một giá trị giới hạn và không thay đổi.

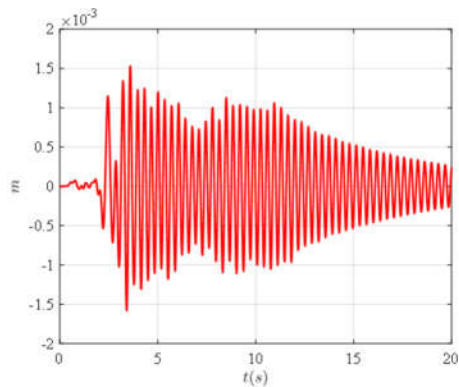


a) Đáp ứng chuyển vị

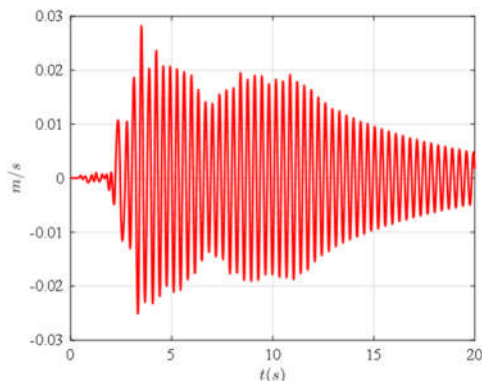


b) Đáp ứng vận tốc

Hình 6. Các đáp ứng động tại điểm chính giữa khung vát dưới tác dụng của tải trọng gió tại Lang Cang



a) Chuyển vị

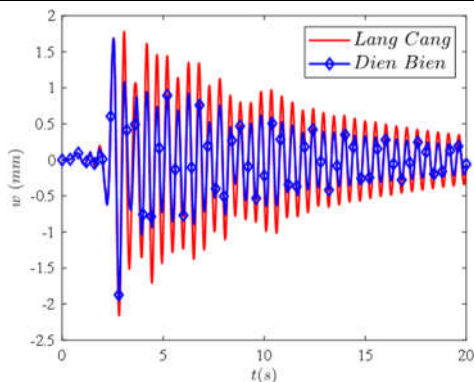


b) Vận tốc

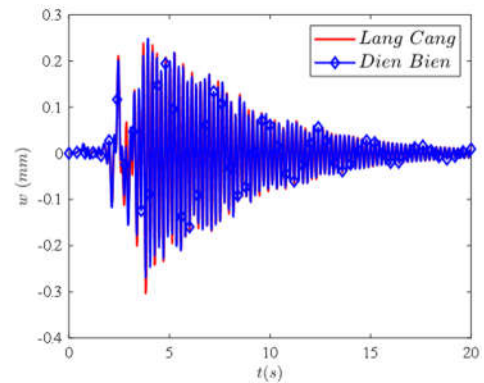
Hình 7. Các đáp ứng động tại điểm chính giữa khung vát dưới tác dụng của tải trọng gió tại Điện Biên

Bảng 1. Ảnh hưởng của độ cứng biên nửa cứng đến các đáp ứng động lớn nhất của khung dưới tác dụng của tải trọng gió tại Lang Cang và Điện Biên tại nút số 4

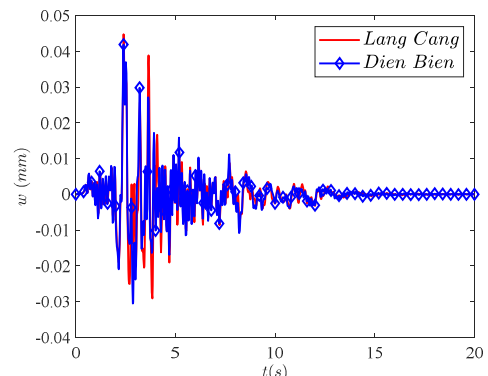
k	Lang Cang			Điện Biên		
	w(mm)	v (mm/s)	a (mm/s ²)	w (mm)	N (mm/s)	a(mm/s ²)
10 ⁻⁶ E	7,6730	71,6503	880,8773	5,9853	44,9550	557,3688
10 ⁻⁵ E	1,7789	24,2478	336,2663	1,6820	19,8964	282,2704
10 ⁻⁴ E	0,2386	7,2749	198,5558	0,2484	7,2737	203,7516
10 ⁻³ E	0,0582	1,1924	36,1549	0,0577	1,2167	40,8243
10 ⁻² E	0,0448	0,7467	27,4429	0,0419	0,7506	27,1716
10 ⁻¹ E	0,0429	0,6835	24,0995	0,0399	0,6827	25,4511
10 ⁰ E	0,0427	0,6789	24,0145	0,0397	0,6825	25,1629
10 ¹ E	0,0427	0,6784	24,0050	0,0397	0,6825	25,1333
10 ² E	0,0427	0,6784	24,0041	0,0397	0,6825	25,1303



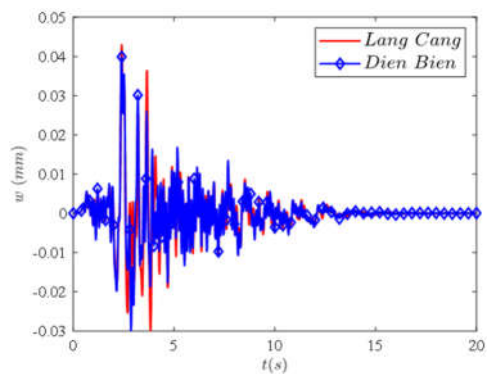
k = 10⁻⁵E



k = 10⁻⁴E



k = 10⁻²E



k = 10⁻¹E

Hình 8. Ảnh hưởng của biên nửa cứng đến đáp chuyển vị của nút số 4 của khung theo thời gian tại hai điểm đo gió

Các đáp ứng động lực học của khung tại nút số 4 trên khung được làm rõ hơn ở các đồ thị hình 8.

4. KẾT LUẬN

Phân tích động lực học khung vát có liên kết nửa cứng chịu tác dụng của tải trọng gió sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn được trình bày trong bài báo này. Liên kết nửa cứng được mô tả là các hệ lò xo đàn hồi cho chuyển vị góc xoay. Mô hình tải trọng gió được đo đạc tại các địa điểm Lang Cang và Điện Biên. Độ chính xác và tin cậy của chương trình tính bài báo thiết lập được kiểm chứng thông qua so sánh với các công bố tin cậy. Bài báo trình bày đáp ứng động của khung thép vát có liên kết nửa cứng chịu tải trọng gió đo tại Lang Cang và Điện Biên. Từ kết quả thu được, có thể thấy rằng biên nửa cứng cũng như tải trọng

gió ảnh hưởng đáng kể đến đáp ứng động của khung thép. Bài báo cung cấp kết quả số cho tính toán, thiết kế khung thép vát có liên kết nửa cứng tại Lang Cang và Điện Biên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Pham Trung Thanh, Vu Thanh Trung, Nguyen Hong Son, 2017. *Comparison of some mathematical models representing the geometrical characteristics of a chamfer element with semi-rigid connections*. Journal of Construction. 222-227.
- [2]. Nguyen Tien Cuong, Ho Du, Pham Khac Hien, 1991. *Các chương trình máy tính thương dụng trong thiết kế xây dựng*. Science and Technics Publishing House, Hanoi.
- [3]. William McGuire, Richard H. Gallagher, Ronald D. Ziemian, 2000. *Matrix Structural Analysis*. John Wiley & Sons, Inc.
- [4]. Franklin Y. Cheng, 2000. *Matrix Analysis of Structural: Applications and Earthquake Engineering*. Marcel, Dekker, Inc, New York.
- [5]. De Rosa M. A., Lippiello M, 2009. *Natural Vibration Frequencies of Tapered Beams*. Engineering transactions. 57(1), 45-66.
- [6]. Mesut Şimşek, 2009. *Some closed-form solutions for static, buckling, free and forced vibration of functionally graded (FG) nanobeams using nonlocal strain gradient theory*. Composite Structures. 224, 111041.
- [7]. Moayedian M., M. Rezaiee Pajand, 2000. *Explicit stiffness of tapered and monosymmetric I beam-columns*. International Journal of Engineering. 13, 1-18.
- [8]. Takele S., 2002. *Computerized Analysis of Frames with Non Prismatic Members*. MSc. Thesis, University of Addis Ababa.
- [9]. Al-Fatlawi M. S., 2005. *Free Vibration Analysis Tapered Box Grider using Grillage Analogy and Finite Element Methods*. Journal of Engineering, 11.
- [10]. Zhang L., G. S. Tong, 2008. *Lateral buckling of web-tapered I-beams: A new theory*. Journal of Constructional Steel Research, 64, 1379-1393.
- [11]. Louie, 2009. *Stiffness matrix for 2D tapered beams*. Walla University March 29.
- [12]. Zeinali Y. H., S. M. Jamali, S. Musician, 2013. *General form of the stiffness matrix of a tapered beam-column*. International Journal of Mining, Metallurgy & Mechanical Engineering (IJMME). 1, 149-153.
- [13]. Vu Quoc Anh, 2013. *Tính toán và thiết kế khung thép liên kết đàn hồi*. Construction Publishing House, Hanoi.
- [14]. Nguyen Hong Son, 2006. *Analysis of flat steel frames with nonlinear semi-rigid connections including plastic deformation of materials*. PhD thesis, Hanoi Architectural University.

AUTHORS INFORMATION

Trung Thanh Pham¹, Hong Son Nguyen², Thanh Trung Vu¹

¹VietNam Institute for Building Science and Technology

²Hanoi Architectural University