

PHÁT TRIỂN CÔNG THỨC LAI TÍCH PHÂN - VI PHÂN 3D DỰA TRÊN VÉC TƠ ĐIỆN THỂ - ỨNG DỤNG CHO BÀI TOÁN CÓ CẤU TRÚC VỎ MỎNG DẪN ĐIỆN

DEVELOPING AN HYBRID INTEGRO-DIFFERENTIAL FORMULATION 3D BASED ON THE ELECTRIC VECTOR POTENTIAL - APPLICATION TO THE CONDUCTIVE THIN SHELL STRUCTURE

Lê Đức Tùng

TÓM TẮT

Tính toán mô phỏng điện từ trường ngày càng có vai trò quan trọng, đặc biệt trong lĩnh vực thiết kế, chế tạo và vận hành các thiết bị điện - điện tử. Bài báo này phát triển công thức tích hợp giữa các phương trình tích phân và vi phân dựa trên véc-tơ điện thể, ứng dụng cho các thiết bị điện có cấu trúc dạng vỏ mỏng dẫn điện. Hệ phương trình cuối cùng được giải bằng phương pháp số. Công thức được phát triển có ưu điểm là chỉ chia lưới vùng dẫn vỏ mỏng mà không cần chia lưới vùng không khí, làm giảm số ẩn và dung lượng tính toán. Thông qua mô phỏng, tính toán các thông số điện từ cho hai bài toán kinh điển và so sánh với phương pháp FEM 2D, phương pháp đề xuất được kiểm nghiệm và chứng tỏ khả năng áp dụng trong các bài toán thực tiễn.

Từ khóa: Trường điện từ, vùng vỏ mỏng dẫn điện, dòng điện xoáy, phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp tích phân số.

ABSTRACT

Electromagnetic modeling is becoming an increasingly important role, especially in the design, manufacture and operation of electrical-electronic devices. This paper develops a hybrid formulation coupled between the integral and differential equations based on the electric vector potential, applied to electrical devices with conductive thin-shell structure. The final equations were solved by numerical methods. The advantage of proposed formulation is the only meshing on the thin-shell without air-meshing, reducing the unknowns and the memory computing. Through the modeling and calculation of electromagnetic parameters for two classic problems and comparison with FEM 2D method, the developed method was validated and proved applicable in practical problems.

Keywords: Electromagnetics, conductive thin shell, eddy current, finite element method, numerical integral method.

Viện Điện, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Email: tung.leduc1@hust.edu.vn

Ngày nhận bài: 02/5/2020

Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 10/6/2020

Ngày chấp nhận đăng: 24/6/2020

TỪ VIẾT TẮT

FEM	Phương pháp phần tử hữu hạn
PEEC	Phương pháp mạch điện thay thế tương đương

MOM	Phương pháp mô men
BEM	Phương pháp phần tử biên
IDM	Phương pháp lai tích phân - vi phân

1. GIỚI THIỆU

Các thiết bị điện là một phần không thể thiếu đối với nền văn minh dựa trên điện năng của con người. Với sự phát triển không ngừng của khoa học kỹ thuật, các thiết bị điện ngày càng tinh vi và hiện đại hơn. Bên cạnh sự phức tạp về hình dạng hình học từ dày đến mỏng, nhiều dạng thù hình, từ kích thước rất nhỏ đến rất lớn, các thiết bị điện còn sử dụng rất nhiều vật liệu khác nhau: vật liệu điện, vật liệu từ, vật liệu cách điện, vật liệu composit... Do vậy, việc nghiên cứu thiết kế chế tạo các thiết bị điện tiên tiến là một thách thức không nhỏ đối với khoa học.

Trong quá trình chế tạo các thiết bị điện, tối ưu hóa chi phí là một trong những vấn đề quan trọng. Cùng với sự phát triển của khoa học máy tính và các kiến thức vật lý hiện đại, việc sử dụng các công cụ mô phỏng số luôn được ưu tiên vì lý do tiết kiệm chi phí so với việc tạo ra thiết bị mẫu thực vì khi sử dụng mô phỏng số, chúng ta có thể dễ dàng thay đổi các tham số, tạo ra nhiều mô hình ảo đáp ứng yêu cầu thiết kế mà không tốn thêm chi phí nào [1-4].

Các phương pháp số thường được áp dụng trong mô phỏng trường điện từ được chia làm hai loại: Các phương pháp hữu hạn (finite methods) giải hệ phương trình Maxwell dưới dạng vị phân, như là phương pháp phần tử hữu hạn FEM (Finite Element Method), phương pháp thể tích hữu hạn FVM (Finite Volume Method) và các phương pháp tích phân số giải hệ phương trình Maxwell dưới dạng tích phân, như là phương pháp tích phân bề mặt BEM (Boundary Element Method), phương pháp mô men MoM (Method of Moment), phương pháp PEEC (Partial Element Equivalent Circuit) [5-10]. Việc lựa chọn một trong những phương pháp trên hoàn toàn phụ thuộc vào các hiện tượng vật lý cần mô phỏng: tần số cao hay thấp, có vật liệu từ hay không, có xét đến hiệu ứng điện cảm hay điện dung, nguồn kích thích ngoài... Tuy nhiên, không có một phương

pháp là vạn năng và tối ưu trong mọi bài toán và việc lựa chọn phương pháp tốt nhất phụ thuộc vào tính chất thiết bị điện và dải hoạt động của nó.

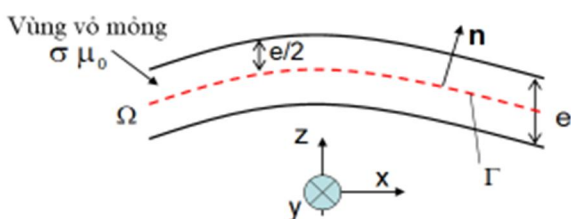
Trong các phương pháp được mô tả ở trên, phương pháp hữu hạn FEM đã trở thành một phương pháp tổng quát cho việc giải các bài toán điện từ như là các bài toán từ tĩnh và các bài toán từ động [2]. Hiện nay, phương pháp này được phát triển và thương mại hóa dưới dạng phần mềm mô phỏng, tiêu biểu là phần mềm Maxwell của công ty Ansys [3], phần mềm Flux3D của công ty Cedrat [4]. Tuy nhiên nhược điểm lớn nhất của phương pháp này là phải chia lưới và tính toán vùng không khí. Do đó, khi sử dụng phương pháp FEM để mô phỏng 3D các thiết bị điện phức tạp, có nhiều khoảng trống không khí tạo ra các phương trình phần tử hữu hạn với số bậc tự do lớn. Điều này làm cho việc giải phương trình bằng máy tính điện tử là rất khó khăn thậm chí là không thể thực hiện được.

Bài báo này phát triển công thức lai kết hợp phương trình vi phân và tích phân dựa trên véc-tơ điện thế để mô phỏng điện từ trong các cấu trúc có dạng vỏ mỏng dẫn điện. Vùng vỏ mỏng được mô tả bởi hệ phương trình vi phân và giải bằng phương pháp FEM, trong khi đó tương tác với từ trường ngoài ở vùng không khí được mô phỏng và giải bằng phương pháp tích phân số. Phương pháp này còn được gọi là phương pháp lai tích phân- vi phân IDM (Integro-Differential Method). Ưu điểm của phương pháp nằm ở chỗ không phải chia lưới vùng không khí bao quanh đối tượng tính toán, giảm thời gian cũng như khối lượng tính toán.

Phần tiếp theo của bài báo giới thiệu hệ phương trình lai tích phân - vi phân và phương pháp số giải hệ phương trình đó. Để kiểm nghiệm phương pháp đã phát triển, hai ví dụ kinh điển đã được mô phỏng và so sánh kết quả trong mục 3. Cuối cùng là kết luận bài báo cũng như các hướng nghiên cứu tiếp theo sẽ được trình bày trong mục 4.

2. PHƯƠNG PHÁP LAI TÍCH PHÂN - VI PHÂN

Công thức được phát triển dựa trên nghiên cứu của S.J. Salon [11]. Tuy nhiên, công thức trong [11] có nhược điểm là chỉ áp dụng cho các cấu trúc dạng phẳng. Trong phần này, tác giả phát triển các hệ phương trình cho phép mô phỏng điện từ cấu trúc dạng vỏ mỏng trong không gian 3D.



Hình 1. Vùng vỏ mỏng dẫn điện

Chúng ta xem xét một vùng vỏ mỏng dẫn điện (σ, μ_0) có bề dày e và thể tích Ω . Γ là bề mặt trung bình như hình 1.

Biến thiên điện từ trường trong vùng dẫn được mô tả bằng hệ phương trình Maxwell:

$$\text{rot}\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \tag{1}$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{2}$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \tag{3}$$

Phương trình Ampère-Maxwell (2) chứng tỏ sự tồn tại một véc-tơ điện thế \mathbf{T} được định nghĩa:

$$\text{rot}\mathbf{T} = \mathbf{J} \tag{4}$$

Xem xét thành phần pháp tuyến của véc-tơ cảm ứng từ \mathbf{B} trên bề mặt Γ , chúng ta có:

$$(\text{rot}\mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} = -j\omega\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \tag{5}$$

Áp dụng phương pháp Galerkin cho bề mặt Γ , phương trình dạng tích phân mô tả (5) là:

$$\int_{\Gamma} w_i(\text{rot}\mathbf{E}) \cdot \mathbf{n}d\Gamma = -j\omega \int_{\Gamma} w_i\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}d\Gamma \tag{6}$$

với w_i là hàm trọng số.

Áp dụng đẳng thức $\text{rot}(m \cdot \mathbf{U}) = m \cdot \text{rot}\mathbf{U} + (\text{grad}m) \times \mathbf{U}$, phương trình (6) được viết lại dưới dạng:

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma} (\text{grad}w_i \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n}d\Gamma + \int_{\Gamma} \text{rot}(w_i \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n}d\Gamma \\ = -j\omega \int_{\Gamma} w_i\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}d\Gamma \end{aligned} \tag{7}$$

Hoán đổi các bộ phận trong biểu thức của thành phần thứ nhất và áp dụng định luật Stokes trong thành phần thứ hai về trái của phương trình (7), ta thu được:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) \cdot \text{grad}w_i d\Gamma - \oint_C w_i \mathbf{E} d\Gamma = j\omega \int_{\Gamma} w_i\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}d\Gamma \tag{8}$$

$\oint_C w_i \cdot \mathbf{E} \cdot d\Gamma$ là tích phân đường theo vòng C bao quanh bề mặt Γ . Thành phần này có giá trị bằng 0 với điều kiện biên [2].

Như vậy, phương trình (8) trở thành:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) \cdot \text{grad}w_i \cdot d\Gamma = j\omega \int_{\Gamma} w_i \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma \tag{9}$$

Từ (3) và (4), chúng ta có:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{\text{rot}\mathbf{T}}{\sigma} \tag{10}$$

Vậy:

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{n}) = \frac{1}{\sigma}(\text{rot}\mathbf{T} \times \mathbf{n}) \tag{11}$$

Áp dụng đẳng thức: $\text{grad}_s(\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) = (\mathbf{n} \cdot \text{grad}_s) \cdot \mathbf{T} + \mathbf{n} \times \text{rot}\mathbf{T}$ và lưu ý rằng trên bề mặt Γ : $\mathbf{n} \cdot \text{grad}_s = 0$ và véc-tơ điện thế \mathbf{T} chỉ có thành phần pháp tuyến, chúng ta có phương trình sau:

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{n}) = -\frac{1}{\sigma}(\text{grad}_s(T_n)) \tag{12}$$

với T_n là thành phần pháp tuyến của véc-tơ \mathbf{T} : $T_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$

Phương trình (9) trở thành:

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\Gamma} \text{grad}w_i \cdot \text{grad}_s(T_n) \cdot d\Gamma = -j\omega \int_{\Gamma} w_i \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma \tag{13}$$

Từ trường tại điểm P bất kỳ có thể viết dưới dạng:

$$\mathbf{H}(P) = \mathbf{H}_0(P) + \mathbf{H}_j(P) \tag{14}$$

Với \mathbf{H}_0 là từ trường của nguồn ngoài, \mathbf{H}_j là từ trường do dòng điện xoáy trong vùng dẫn vỏ mỏng gây ra.

Áp dụng định luật Biot-Savart, chúng ta có:

$$\mathbf{H}_j(P) = \frac{e}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} d\Gamma \tag{15}$$

với \mathbf{r} là véc-tơ giữa điểm điểm lấy tích phân trên Γ và điểm tính toán từ trường P .

Kết hợp các phương trình (13), (14), (15), chúng ta có hệ phương trình cuối cùng:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma} \int_{\Gamma} \mathbf{grad}_s w_i \cdot \mathbf{grad}_s (T_n) d\Gamma \\ + j\omega \cdot \frac{e \cdot \mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} w_i \left(\int_{\Gamma} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} d\Gamma \right) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ = -j\omega \cdot \mu_0 \int_{\Gamma} w_i \cdot \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma \\ \mathbf{J} = \mathbf{rot} \mathbf{T} \end{cases} \tag{16}$$

Để giải hệ phương trình (16), phương pháp số được sử dụng bằng cách chia lưới bề mặt Γ thành n phần tử với giả thiết mật độ dòng điện \mathbf{J} là hằng số trên mỗi phần tử. Gọi p là số nút của mạng lưới.

Giá trị véc-tơ điện thế được xác định dưới dạng:

$$T_n = \sum_{k=1}^p w_k(x, y, z) T_{nk} \tag{17}$$

Chúng ta thu được hệ phương trình dưới dạng ma trận:

$$\begin{cases} [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{T}] + [\mathbf{Bs}] \cdot [\mathbf{J}] = [\mathbf{h}_{0n}] \\ [\mathbf{J}] = [\mathbf{P}] \cdot [\mathbf{T}] \end{cases} \tag{18}$$

Hay là:

$$\{[\mathbf{A}] + [\mathbf{Bs}] \cdot [\mathbf{P}]\} \cdot [\mathbf{T}] = [\mathbf{h}_{0n}] \tag{19}$$

Hệ phương trình (2) có p ẩn số. $[\mathbf{A}]$ là ma trận phần tử hữu hạn kích thước ($p \times p$); $[\mathbf{Bs}]$ là ma trận biểu thị định luật Biot - Savart, nhận được từ công thức (17) với giá trị dòng điện xoáy đơn vị ($p \times 3n$); $[\mathbf{P}]$ là ma trận ($3n \times p$) và $[\mathbf{h}_0]$ là véc-tơ kích thước p biểu thị thành phần pháp tuyến của nguồn từ trường ngoài tại mỗi nút của mạng lưới.

Các giá trị thành phần của ma trận $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{Bs}]$ và $[\mathbf{h}_0]$ là:

$$\mathbf{A}(i, k) = \frac{1}{\sigma} \int_{\Gamma} \mathbf{grad} w_i \cdot \mathbf{grad} w_k d\Gamma \tag{20}$$

$$\mathbf{B}_s(i, k) = j\omega \cdot \frac{e \cdot \mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} w_i \left(\int_{\Gamma_k} \frac{\mathbf{u}_k \times \mathbf{r}}{r^3} d\Gamma \right) \cdot \mathbf{n}_i d\Gamma \tag{21}$$

$$\mathbf{h}_{0n}(i) = -j\omega \cdot \mu_0 \int_{\Gamma} w_i \cdot \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n}_i \cdot d\Gamma \tag{22}$$

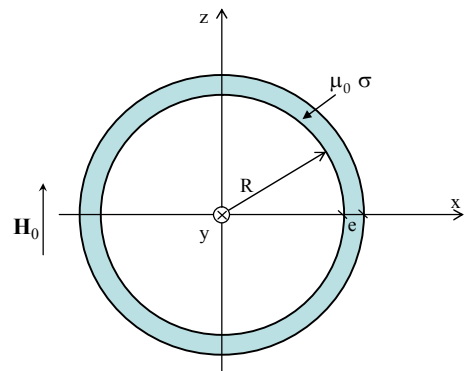
với \mathbf{u}_k là véc-tơ đơn vị của dòng điện xoáy của phần tử k .

Tác giả đã thiết lập công cụ tính toán trong môi trường Matlab. Trong phần tiếp theo sẽ trình bày kiểm chứng phương pháp cũng như phân tích đánh giá khả năng áp dụng, các hướng phát triển của nghiên cứu.

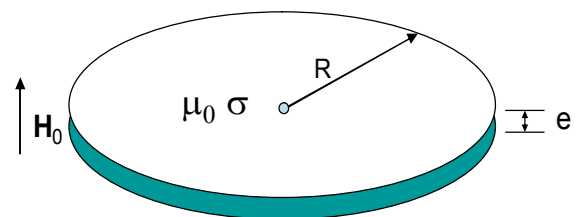
3. BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Do thiếu các thiết bị để tiến hành thực nghiệm và đo đếm kết quả thực tế, nên để kiểm chứng phương pháp được phát triển trong mục 2, tác giả đã lựa chọn hai ví dụ kinh điển là các thiết bị có cấu trúc đối xứng trục (hình 3). Với các ví dụ này, chúng ta có thể sử dụng phương pháp FEM 2D để mô phỏng và tính toán. Phương pháp FEM 2D có số phần tử chia lưới không cần nhiều như trong mô hình 3D, nên dễ dàng xác định nghiệm hội tụ và kết quả được xem là giá trị chuẩn khi so sánh với các phương pháp khác. Các thiết bị được mô phỏng trong mô hình 3D bởi phương pháp IDM đã trình bày trong bài báo.

Mục đích của bài toán là xác định tổn thất joule trong vùng dẫn dạng vỏ mỏng và phân bố dòng điện trên bề mặt vùng dẫn.



Hình 2. Cấu rỗng dẫn điện

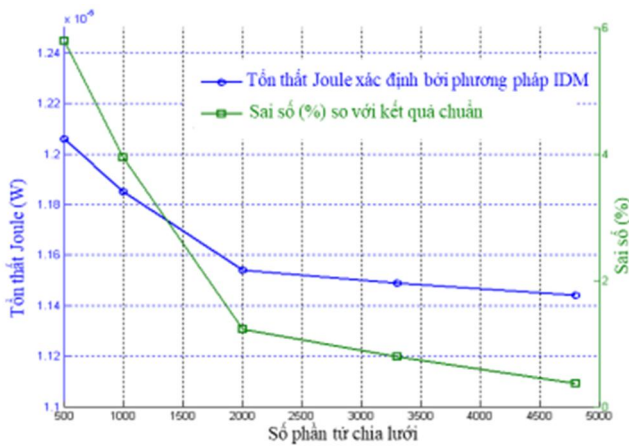


Hình 3. Đĩa mỏng dẫn điện

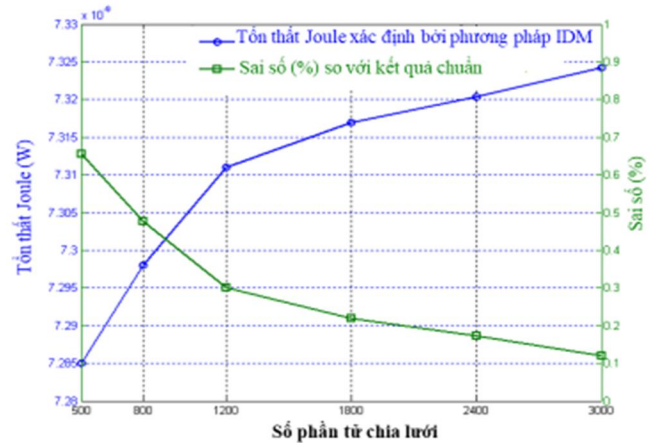
3.1. Cấu rỗng dẫn điện

Ví dụ đầu tiên là một quả cầu rỗng với bề dày $e = 2\text{mm}$ bán kính trong là $R = 0,1\text{m}$, đặt trong một từ trường đều $\mathbf{H}_0 = [0 \ 0 \ 1]$ (A/m) với tần số $f = 50\text{Hz}$. Độ dẫn điện của quả cầu là $6 \times 10^7 \text{S/m}$ (hình 2). Với tần số $f = 50\text{Hz}$, độ sâu bề mặt $\delta = 9\text{mm}$ thỏa mãn điều kiện $\delta \gg e$. Kết quả tính toán tổn thất Joule bằng phương pháp FEM 2D hội tụ ở 20.000 phần tử chia lưới và có giá trị là $1,14 \times 10^{-6}$ (W).

Hình 4 là kết quả tính toán tổn thất Joule bởi phương pháp IDM và sai số so với giá trị chuẩn theo số phần tử chia lưới. Chúng ta nhận thấy, phương pháp được phát triển cho kết quả tương tự so với FEM 2D. Chỉ cần chia lưới thành 4800 phần tử thì đã đạt được kết quả gần chính xác với sai số 0,3%. Phương pháp này có khả năng mô phỏng điện từ các vùng dẫn dạng vỏ mỏng.



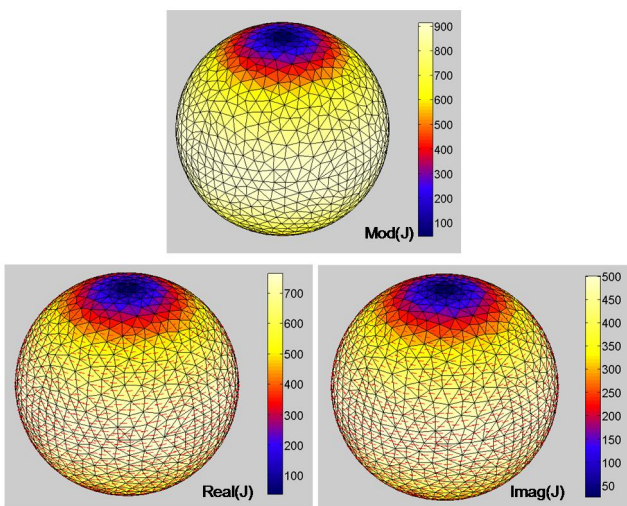
Hình 4. Tổn thất Joule tính toán bởi phương pháp IDM và sai số so với giá trị chuẩn



Hình 6. Tổn thất Joule tính toán bằng phương pháp IDM và sai số so với giá trị chuẩn theo số phần tử chia lưới ở tần số $f = 0,01\text{Hz}$

Cũng như ví dụ trước, phương pháp IDM cho kết quả rất sát với giá trị chuẩn. Chúng ta chỉ cần 3000 phần tử để thu được kết quả gần chính xác, với sai số bằng 0,1%.

Hình 7 trình bày phân bố dòng điện xoáy trên bề mặt tấm đĩa mỏng xác định bằng phương pháp IDM.



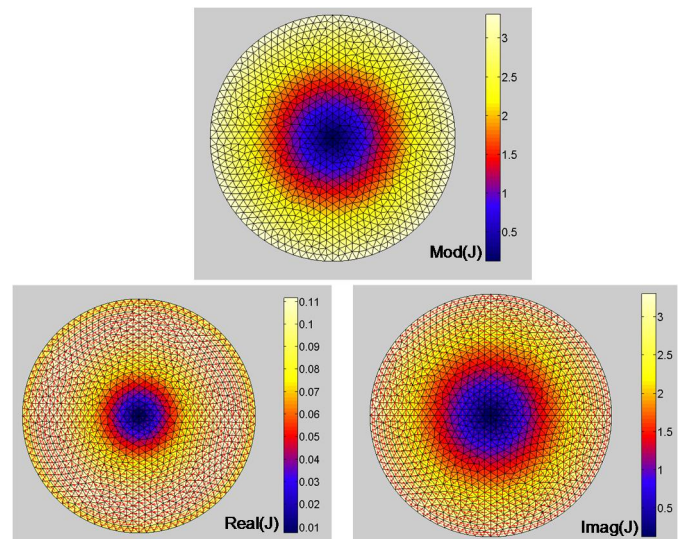
Hình 5. Mật độ dòng điện tính toán bởi phương pháp IDM (A/m^2)

Hình 5 là hình ảnh chỉ phân bố dòng điện xoáy trên bề mặt của quả cầu xác định bởi phương pháp IDM. Chúng ta cũng lưu ý rằng phương pháp FEM 2D không thể xác định được phân bố này. Như vậy phương pháp đã phát triển có khả năng mô phỏng các cấu trúc cong và trong không gian 3D. Đây là ưu điểm khi so sánh với nghiên cứu [11], trong đó chỉ có thể tính toán cho các vùng vỏ mỏng dẫn điện dạng phẳng.

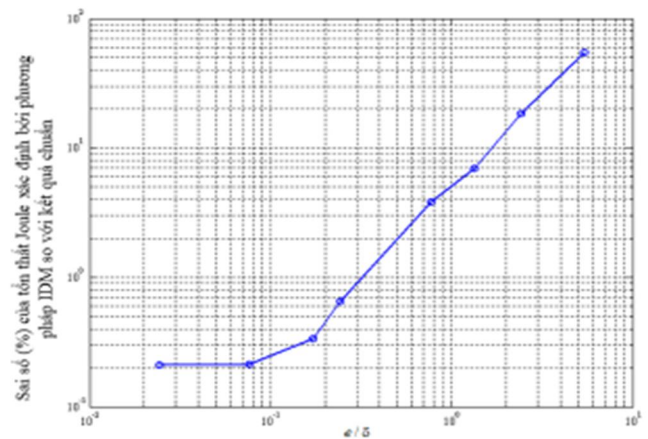
3.2. Đĩa mỏng dẫn điện

Bài toán thứ hai được nghiên cứu là một thiết bị dạng đĩa mỏng dẫn điện có bán kính $R = 1\text{m}$, đặt trong một từ trường đều, xoay chiều $H_0 = [0, 0, 1]$ (A/m). Độ dẫn điện của đĩa mỏng là $6 \times 10^7 \text{S}/\text{m}$ và bề dày là $0,05\text{m}$ (hình 3).

Trước hết, chúng ta xem xét bài toán ở tần số $f = 0,01\text{Hz}$. Độ sâu bề mặt là $0,6\text{m}$, do đó chúng ta có thể xác định là không có hiệu ứng bề mặt trong trường hợp nghiên cứu. Tổn thất Joule tính toán bằng phương pháp FEM 2D có giá trị hội tụ là $7,33 \times 10^{-9}\text{W}$ và được xem là giá trị chuẩn. Hình 6 thể hiện tổn thất Joule xác định bởi phương pháp được phát triển theo số phần tử chia lưới.



Hình 7. Mật độ dòng điện xoáy xác định bằng phương pháp IDM với tần số $f = 0,01\text{Hz}$ (A/m^2)



Hình 8. Ảnh hưởng của tần số: Sai số của tổn thất Joule theo tỷ lệ e/δ

Để đánh giá thêm về khả năng tính toán và phạm vi áp dụng của phương pháp IDM, tác giả đã tiến hành tính toán mô phỏng với nhiều tần số khác nhau. Khi tần số tăng dần, độ sâu bề mặt trở nên bé dần. Phương pháp được phát triển trong bài báo dựa trên giả thiết dòng điện không đổi theo bề dày của vùng vỏ mỏng sẽ không còn chính xác bởi vì điều kiện $\delta \gg e$ không được thoả mãn. Để phương pháp IDM cho kết quả chấp nhận được (sai số bé hơn 2% so với giá trị chuẩn), hình 8 chỉ ra rằng tỷ số giữa bề dày đĩa mỏng và độ sâu bề mặt phải nhỏ hơn 0,5 ($e/\delta < 0,5$).

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã giới thiệu, phát triển công thức lại, kết hợp giữa phương trình tích phân và vi phân để giải bài toán điện từ có cấu trúc dạng vỏ mỏng dẫn điện trong không gian 3D. Phương pháp được phát triển chỉ cần chia lưới bề mặt trung bình của vùng vỏ mỏng, giúp giảm thời gian cũng như khối lượng tính toán. Các kết quả tính toán, mô phỏng cũng được so sánh với kết quả chuẩn đạt được từ phần mềm công nghiệp dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn 2D. Tuy nhiên, phương pháp còn có sai số khi hiệu ứng bề mặt trong vùng dẫn điện lớn ($e \gg \delta$). Điểm giới hạn này sẽ được đầu tư ở các nghiên cứu tiếp theo.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo trong đề tài mã số B2018-BKA-11-CtrVL.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Salon, Sheppard, and M. V. K. Chari, 1999. *Numerical methods in electromagnetism*. Academic Press.
- [2]. G. Meunier, 2008. *The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling*. Wiley.
- [3]. *Maxwell ANSYS*. Canonsburg, USA. Available: www.ansys.com
- [4]. *Flux Cedrat*. Meylan, France [Online]. Available: www.cedrat.com
- [5]. C. Hoer, C. Love, 1965. *Exact Inductance Equations for Rectangular Conductors With Applications to More Complicated Geometries*. Journal of Research of the national Bureau of Standards-C. Engineering and Instrumentation, Vol. 69C, No. 2, 127-137, 1965.
- [6]. De Camillis L., Ferranti F., Antonini G., Vande Ginste D., De Zutter D., 2012. *Parameterized Partial Element Equivalent Circuit Method for Sensitivity Analysis of Multiport Systems*. IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology, Vol.2, No.2, pp. 248-255.
- [7]. T. Le-Duc, G. Meunier, O. Chadebec, J-M. Guichon and J.P.A Bastos, 2013. *General Integral Formulation for the 3D Thin Shell Modeling*. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 49, No. 5, pp. 1989-1992.
- [8]. T. Le-Duc, O. Chadebec, J-M. Guichon, G. Meunier and Y. Lembeye, 2013. *Coupling between Partial Element Equivalent Circuit Method and Magnetic Moment Method*. The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL), Vol. 32, No. 1, pp. 383-395.
- [9]. K. Ishibashi, Z. Andjelic, D. Pusch, 2010. *Nonlinear Eddy Current Analysis by BEM Minimum Order Formulation*. IEEE Transaction on Magnetics, vol. 46, no. 8, pp. 3085-3088.

[10]. K. Ishibashi, Z. Andjelic, Y. Takahashi, T. Takamatsu, K. Tsuzaki, S. Wakao, K. Fujiwara, Y. Ishihara, 2012. *Some Treatments of Fictitious Volume Charges in Nonlinear Magnetostatic Analysis by BIE*. IEEE Transaction on Magnetics, vol. 48, no. 2, pp. 463-466.

[11]. S.J. Salon, B. Mathewson and S. Uda, 1983. *An Integro-Differential Approach to Eddy Currents in Thin Plates*. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. Mag-19, No.6.

AUTHOR INFORMATION

Le Duc Tung

School of Electrical Engineering, Hanoi University of Science and Technology