TÍNH GIẢI ĐƯỢC ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH VI TÍCH PHÂN PHÂN THỨ NỬA TUYẾN TÍNH DẠNG LATTICE

SOLVABILITY FOR FRACTIONAL SEMILINEAR LATTICE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Nguyễn Như Quân

TÓM TẮT

Trong bài báo này, tác giả nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của toán tử giải thức sinh ra bởi một toán tử dạng lattice và nghiên cứu sự tồn tại cũng như tính duy nhất nghiệm của phương trình vi tích phân phân thứ dạng lattice bằng cách sử dụng nguyên lí điểm bất động Banach.

Từ khóa: *Sự tồn tại nghiệm, toán tử lattice, nguyên lí điểm bất động Banach.*

ABSTRACT

In this paper, author studies the behavior of α-resolvent operator generated by a lattice operator and the existence and unique of solution for fractional semilinear lattice integro-differential equation by using Banach fixed point theorem.

Keywords: *The existence, lattice operator, Banach fixed point theorem.*

Trường Đại học Điện lực

Email: quan2n@epu.edu.vn

Ngày nhận bài: 05/9/2019

Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 05/10/2019

Ngày chấp nhận đăng: 20/12/2019

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong không gian $\ell^2 = \left\{ (x_i)_{i\in} : \sum_{i\in\mathbb{Z}} (x_i)^2 < +\infty \right\}$, với chuẩn $\|(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\| = \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{Z}} (x_i)^2}$. Chúng tôi xét bài toán sau:

$$\begin{aligned} u_i'(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} (Au)_i(s)ds + f_i(t, u_i(t)), \quad t\in[0,T], \\ u_i(0) &= u_{0i},\ i\in\mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{1}$$

ở đây hàm chưa biết $u(t) = (u_i)(t)_{i\in\mathbb{Z}} \in \ell^2, \alpha\in(1,2)$ và A là toán tử dạng lattice được định nghĩa ở phần sau, hàm phi tuyến $f\in C([0,+\infty)\times\ell^2;\ell^2)$. Các hệ vi phân dạng lattice được nghiên cứu và có nhiều ứng dụng ở nhiều lĩnh vực khác nhau trong khoa học cũng như kỹ thuật khi mà cấu trúc không gian có đặc tính rời rạc. Có thể kể đến những ví dụ tiêu biểu như bài toán xử lý hình ảnh [4, 5] bài toán nhận dạng [6] phản ứng hóa học [7, 8], kỹ thuật điện [2],…. Mặt khác, các hệ lattice phát sinh từ việc rời rạc không gian của phương trình đạo hàm riêng. Về vấn đề này, để tìm hiểu các nội dung chi tiết chúng tôi giới thiệu đến đọc giả công trình của Hale [3].

Để viết lại hệ phương trình (1) ở dạng tổng quát trong không gian ℓ^2. Với mỗi dãy $u = (u_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, trong ℓ^2, ta đặt:

$$(Bu)_i = u_{i+1} - u_i;\quad (B^*u_i) = u_{i-1} - u_i$$

và

$$\begin{aligned} (A_0u)_i &= -u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}; \\ (Au)_i &= u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} - \mu u_i, \end{aligned} \tag{2}$$

với mỗi $i\in\mathbb{Z}, \mu\in\mathbb{R}^+$.

Ta thấy rằng:

$A = -A_0 - \mu I$; $A_0 = BB^* = B^*B$; $(B^*u, v) = (u, Bv)$

với mọi $u, v\in\ell^2$

Khi đó, hệ (1) tương đương hệ sau với $u = (u_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + f(t, u(t)),\ t>0, \\ u_0 &= u_0 \end{aligned} \tag{3}$$

ở đây $f(t, u(t)) = \left(f_i(t, u_i(t))\right)_{i\in\mathbb{Z}}$.

2. TOÁN TỬ GIẢI THỨC VÀ NGUYÊN LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG

Kí hiệu $\mathcal{L}(X)$ là không gian các toán tử tuyến tính bị chặn trên X. Sau đây là một số khái niệm và các kết quả về toán tử giải thức liên quan đến vấn đề nghiên cứu trong bài báo này.

Định nghĩa 2.1: Cho A là một toán tử tuyến tính, bị chặn với miền xác định D(A) trên không gian Banach X. Ta nói rằng, A là toán tử sinh của một α-giải thức nếu tồn tại $\omega\in\mathbb{R}$ và một hàm liên tục mạnh $S_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ sao cho $\{\lambda^\alpha : Re\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$ và

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\alpha(t)x dt, Re\lambda > \omega, x\in X.$$

Vấn đề nghiên cứu về sự tồn tại của α-giải thức đã được thảo luận trong [1]. Cụ thể, cho A là một toán tử tuyến tính đóng và xác định trù mật. Giả sử rằng, A là một toán tử quạt kiểu (ω, θ), nghĩa là, tồn tại $\omega\in\mathbb{R}, \theta\in(0, \frac{\pi}{2}), M>0$ sao cho giải thức của nó nằm trong $\mathbb{C}\setminus\Sigma_{\omega,\theta}$ và

 P-ISSN 1859-3585 | E-ISSN 2615-9619

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \le \frac{M}{|\lambda - \omega|}, \lambda \notin \Sigma_{\omega,\theta},$$

ở đây

$$\Sigma_{\omega,\theta} = \{\omega + \lambda : \lambda \in \mathbb{C}, |\arg(-\lambda)| < \theta\}.$$

Trong trường hợp $0 \le \theta < \pi(1 - \alpha/2)$, $S_\alpha(.)$ tồn tại và có biểu diễn sau:

$$S_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{t\lambda}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}d\lambda, t \ge 0,$$

ở đây, γ là đường cong thích hợp nằm ngoài $\Sigma_{\omega,\theta}$.

Định lí 2.2. ([1, Theorem 1]) Cho $A : D(A) \subset X \to X$ là toán tử quạt kiểu (ω, θ) với $0 \le \theta < \pi(1 - \alpha/2)$. Khi đó tồn tại C > 0 độc lập với t sao cho:

$$\|S_\alpha(t)\| \le \begin{cases} C(1 + \omega t^\alpha)e^{\omega^{1/\alpha}t}, & \omega \ge 0, \\ \dfrac{C}{1 + |\omega| t^\alpha}, & \omega < 0, \end{cases}$$

với t ≥ 0.

Một trong những kết quả chính của bài báo này là chứng minh được tính chất liên quan đến dáng điệu của $S_\alpha(.)$ sau:

Mệnh đề 2.3: Cho A là toán tử được định nghĩa (2) và $0 \le \theta < \pi(1 - \alpha/2)$. Khi đó, tồn tại C > 0 độc lập với t sao cho:

$$\|S_\alpha(t)\| \le \frac{C}{1 + \mu t^\alpha} \text{ với } t \ge 0.$$

Chứng minh

Lưu ý rằng A là một toán tử bị chặn, tự liên hợp do đó σ(A) tập giải của A là tập các số thực compact.

Trước hết, ta chứng minh rằng

$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -\mu\} \in \rho(A)$.

Lấy $x \in \ell^2$ sao cho $(\lambda I - A)x = 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle(\lambda I - A)x, x\rangle \\ &= \langle(\lambda I + A_0 + \mu I)x, x\rangle \\ &= (\operatorname{Re}\lambda + \mu)|x|^2 + |Bx|^2 + i\operatorname{Im}\lambda|x|^2. \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến $(\operatorname{Re}\lambda + \mu)|x|^2 + |Bx|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $\operatorname{Ker}(\lambda I - A) = \{0\}$. Vì vậy, λI - A là một đơn ánh và $\lambda \in \rho(A)$.

Tiếp theo, ta cần chứng minh rằng tồn tại một hằng số M sao cho:

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \le \frac{M}{|\lambda - \omega|}, \lambda \in C, \operatorname{Re}\lambda > -\mu.$$

Lấy $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > -\mu$. Với $u \in \ell^2$ tồn tại $f \in \ell^2$ sao cho $(\lambda I - A)^{-1}f = u$.

Ta có:

$$\begin{aligned} |u||f| \ge |\langle f, u\rangle| &= |\langle(\lambda I - A)u, u\rangle| \\ &= |\langle(\lambda I + A_0 + \mu I)u, u\rangle| \\ &= |((\lambda + \mu)I + A_0)u, \bar{u}| \\ &= |(\operatorname{Re}\lambda + \mu)|u|^2 + |Bu|^2 + i\operatorname{Im}\lambda|u|^2| \\ &= \sqrt{((\operatorname{Re}\lambda + \mu)|u|^2 + |Bu|^2)^2 + (\operatorname{Im}\lambda|u|^2)^2} \\ &\ge \sqrt{(\operatorname{Re}\lambda + \mu)^2 + (\operatorname{Im}\lambda)^2}\,|u|^2 = |\lambda + \mu||u|^2. \end{aligned}$$

Vì vậy:

$$|u| \le \frac{|f|}{|\lambda + \mu|} \Leftrightarrow |(\lambda I - A)^{-1}f| \le \frac{|f|}{|\lambda + \mu|}$$
$$\Leftrightarrow \|(\lambda I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{|\lambda + \mu|}.$$

Điều này có nghĩa A là toán tử quạt kiểu (-μ, θ). Áp dụng Định lí 2.2 ta có điều phải chứng minh.

Định nghĩa 2.4: Hàm $u \in C([0,T]; \ell^2)$ được gọi là một nghiệm tích phân của bài toán (1) trên đoạn [0, T] nếu và chỉ nếu $u(0) = u_0$ và

$$u(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, u(s))ds, \quad (4)$$

với mỗi $t \in [0,T]$.

Xét $\mathcal{F} : C([0,T]; \ell^2) \to C([0,T]; \ell^2)$, xác định bởi

$$\mathcal{F}(u)(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, u(s))ds, t \in [0,T]. \quad (5)$$

Khi đó, u là một nghiệm tích phân của (1) nếu nó là một điểm bất động của *toán tử nghiệm* $\mathcal{F}$.

Định nghĩa 2.5. Cho (X, d) là một không gian metric. Khi đó ánh xạ T: X → X được gọi là một ánh xạ co trên X nếu tồn tại $q \in [0,1)$ sao cho:

$$d(T(x), T(y)) \le qd(x, y),$$

với mọi $x, y \in X$.

Định lí 2.6. (Nguyên lí ánh xạ co Banach): Cho (X, d) là một không gian metric đủ và T: X → X là một ánh xạ co. Khi đó T có điểm bất động duy nhất x^* trong X (nghĩa là $T(x^*) = x^*$). Hơn nữa, có thể tìm x^* như sau: bắt đầu bằng một phần tử bất kì $x_0 \in X$ và định nghĩa dãy x_n bởi $x_n = T(x_{n-1})$, khi đó $x_n \to x^*$.

3. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM

Để nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (1), tác giả đưa ra giả thiết sau:

(F) Hàm phi tuyến $f : \mathbb{R}^+ \times \ell^2 \to \ell^2$ thỏa mãn: $\|f(t,u) - f(t,v)\|_{\ell^2} \le m(t)\|u - v\|_{\ell^2}$ với hàm $m(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ là hàm không giảm.

Định lí 3.1: Giả sử giả thiết (F) được thỏa mãn. Khi đó, bài toán (1) có nghiệm duy nhất $u \in C([0,T]; \ell^2)$ với điều kiện

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t \| S_\alpha(t-s)\| m(s)ds < 1. \qquad (6)$$

Nhận xét 3.2: Nhờ Mệnh đề 2.2, ta thấy rằng điều kiện (6) được thỏa mãn nếu ta chọn hàm $m(t) = Nt^{\beta}$ với $\alpha - \beta > 1$.

Chứng minh Định lí 3.1

Ta thấy rằng toán tử nghiệm $\mathcal{F}$ là ánh xạ từ $C([0,T];\ell^2)$ vào chính nó. Để áp dụng dụng nguyên lí ánh xạ co Banach ta sẽ chứng minh $\mathcal{F}$ là một ánh xạ co. Nhắc lại rằng:

$$\mathcal{F}(u)(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u(s))ds, t\in[0,T].$$

Lấy $u, v \in C([0,T];\ell^2)$, nhờ giả thiết (F), ta có:

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{F}(u)(t)-\mathcal{F}(v)(t)\| &\leq \| \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u(s))-f(s,v(s))ds \| \\
&\leq \int_0^t \| S_\alpha(t-s)\| \| f(s,u(s))-f(s,v(s))\| ds \\
&\leq \int_0^t \| S_\alpha(t-s)\| m(s)\| u-v\|_{\ell^2} ds \\
&\leq \sup_{t\geq 0}\int_0^t \| S_\alpha(t-s)\| m(s)ds \| u-v\|_{\ell^2}
\end{aligned}$$

Do vậy:

$$\| \mathcal{F}(u)-\mathcal{F}(v)\|_\infty \leq k\| u-v\|_\infty,$$

ở đây:

$$k = \sup_{t\geq 0}\int_0^t \| S_\alpha(t-s)\| m(s)ds < 1.$$

Vậy, $\mathcal{F}$ là một ánh xạ co. Áp dụng Nguyên lí ánh xạ co Banach suy ra toán tử nghiệm $\mathcal{F}$ có điểm bất động duy nhất u^*. Từ đó ta có thể kết luận bài toán (1) có nghiệm duy nhất.

4. KẾT LUẬN

Kết quả chính của bài báo này là chứng minh được tính chất liên quan đến dáng điệu tiệm cận của toán tử giải thức $S_\alpha(t)$ sinh ra bởi toán tử dạng lattice A. Từ đó, áp dụng nguyên lí điểm bất động Banach để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (1).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] E. Cuesta, 2007. *Asymptotic behaviour of the solutions of fractional integro-differential equations and some time discretizations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. (Supplement) 277-285.

[2] T.L. Carrol, L.M. Pecora, 1990. *Synchronization in chaotic systems*, Phys. Rev. Lett. 64 821–824.

[3] J.K. Hale, 1994. *Numerical dynamics, Chaotic Numerics, Contemporary Mathematics,* vol. 172, American Mathematical Society, Providence, RI, , pp. 1–30.

[4] L.O. Chua, T. Roska, 1993. *The CNN paradigm, IEEE Trans*. Circuits Systems 40 147–156.

[5] L.O. Chua, Y. Yang, 1988. *Cellular neural networks: theory, IEEE Trans*. Circuits Systems 35 1257–1272.

[6] S.N. Chow, J. Mallet-Paret, E.S. Van Vleck, 1996. *Pattern formation and spatial chaos in spatially discrete evolution equations*, Random Comput. Dynam. 4, 109–178.

[7] R. Kapval, 1991. *Discrete models for chemically reacting systems*, J. Math. Chem. 6, 113–163.

[8] T. Erneux, G. Nicolis, 1993. *Propagating waves in discrete bistable reaction diffusion systems,* Physica D 67, 237–244.

AUTHOR INFORMATION

Nguyen Nhu Quan

Electric Power University