

# PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN CHO DẦM TIMOSHENKO CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG

THE FINITE ELEMENT METHOD (FEM) FOR TIMOSHENKO BEAM UNDER MOVING LOAD

Nguyễn Văn Luật<sup>1,\*</sup>, Khuất Đức Dương<sup>1</sup>,  
Nguyễn Thị Thu Hương<sup>1</sup>

## TÓM TẮT

Bài báo trình bày phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) trong đó xây dựng công thức PTHH với ba chuyển vị nút cho dầm Timoshenko chịu tải trọng di động. Kết quả tính đưa ra được ứng xử động học của dầm chịu tải trọng điều hòa di động, trong đó có so sánh với dầm Bernoulli. Nghiên cứu dầm Timoshenko bằng phương pháp PTHH đã có nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu, tuy nhiên điểm khác biệt của bài báo là ở cách xây dựng công thức PTHH trực tiếp từ nguyên lý năng lượng cực tiểu với cách lựa chọn hàm dạng dựa trên đặc điểm của dầm. Thuật toán số sử dụng trong phần tính dựa trên phương pháp gia tốc trung bình trong họ các phương pháp Newmark.

**Từ khóa:** Dầm Timoshenko, tải trọng động, phương pháp phần tử hữu hạn (FEM).

## ABSTRACT

The article presents the finite element method (FEM) which builds the element formula FEM for Timoshenko beam under moving harmonic load with three nodal displacement. The calculated results show dynamic behavior of beam under action of a moving harmonic load, which are compared with Bernoulli beams. The finite element method for Timoshenko beam have been investigated by many authors, however the difference is the construction of FEM formula directly from the principle of minimum energy with choice shape functions based on characteristics of beam. Numerical algorithm using to calculate based on Newmark's method.

**Keywords:** Timoshenko beam, moving load, finite element methods (FEM).

<sup>1</sup>Khoa Cơ khí, Đại học Công nghiệp Hà Nội

\*Email: luatnv1980@gmail.com

Ngày nhận bài: 10/01/2018

Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 04/04/2018

Ngày chấp nhận đăng: 25/04/2018

## 1. MỞ ĐẦU

Trong kỹ thuật hiện nay các chi tiết máy, kết cấu dạng khung - dầm thường dựa trên giả thuyết của Euler- Bernoulli bởi tính đơn giản, dễ tính toán do bỏ qua biến dạng trượt [2,7,9]. Tuy nhiên trong thực tế với các loại dầm có độ dày tương đối hoặc biến dạng lớn thì giả thuyết này không còn phù hợp, để đảm bảo tính chính xác thường phải dùng giả thuyết Timoshenko. Lý thuyết dầm Timoshenko gần với thực tế hơn và có thể xem là mở rộng của lý thuyết Bernoulli khi

có tính tới biến dạng trượt [5,6]. Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) là một trong những phương pháp số được sử dụng phổ biến và có độ tin cậy cao [1,3,4]. Lý thuyết dầm Timoshenko đã được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu bằng cả giải tích và phương pháp số như PTHH với nhiều dạng bài toán khác nhau [6], song các kết quả tính toán phụ thuộc vào việc xây dựng công thức PTHH và chọn các hàm dạng phù hợp. Trong thực tế các kết cấu dầm thường chịu các tải trọng di động như các kết cấu cầu, đường ray dưới tác động của các phương tiện giao thông. Bài báo sử dụng phương pháp PTHH với ba chuyển vị nút cho dầm Timoshenko dưới tác dụng của tải trọng di động điều hòa. Các ma trận độ cứng được xây dựng trực tiếp dựa trên nguyên lý năng lượng cực tiểu từ phiếm hàm năng lượng thiết lập được qua chuyển vị nút và các hàm dạng được lựa chọn với đặc trưng của dầm Timoshenko.

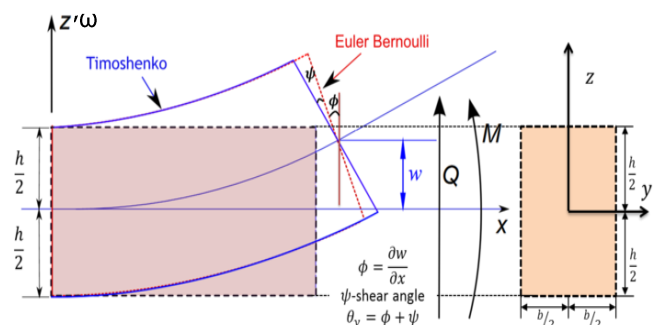
## 2. XÂY DỰNG CÔNG THỨC PHẦN TỬ HỮU HẠN

Lý thuyết dầm Timoshenko có xuất hiện của biến dạng trượt dựa trên giả thuyết thiết diện ngang phẳng sau biến dạng vẫn phẳng nhưng không còn trực giao với lớp trung hòa, biến dạng dọc trục và biến dạng trượt cho bởi [5]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (1)$$

$$\psi = \theta - \frac{\partial w}{\partial x}$$

Nghiên cứu phần tử dầm mặt cắt hình chữ nhật với mỗi nút có 3 chuyển vị nút  $u$ ,  $w$ ,  $\theta$ , do có biến dạng trượt nên  $u$ ,  $w$ ,  $\theta$  độc lập với nhau và không phụ thuộc vào  $z$ .



Hình 1. Mô hình dầm Timoshenko và dầm Bernoulli

Các thành phần ứng suất theo định luật Húc được xác định bởi:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \tau = \kappa G(\theta - \frac{\partial \omega}{\partial x}) \quad (2)$$

Hàm năng lượng biến dạng:

$$U = \frac{1}{2} \int_V [\sigma \varepsilon + \tau \psi] dV = \frac{1}{2} \int_V [(\varepsilon_x E \varepsilon_x + \tau \psi)] dV = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \tau \psi dV \quad (3)$$

Thay (1), (2) vào biểu thức năng lượng biến dạng (3) thu được:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} E b (u_{,x}^2 - 2z u_{,x} \theta_{,x} + z^2 \theta_{,x}^2) dx dz + \frac{\kappa}{2} \int_0^L G A (\theta - w_{,x})^2 dx \quad (4)$$

Do  $u_{,x}$ ,  $\theta_{,x}$  không phụ thuộc vào  $z$  nên  $\int_{-h/2}^{h/2} z u_{,x} \theta_{,x} dz = 0$ ,

từ (4) nhận được biểu thức năng lượng

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (E A u_{,x}^2 + E I \theta_{,x}^2) dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L G A (\theta - w_{,x})^2 dx \quad (5)$$

Trong đó,  $I = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$ ,  $A = b \cdot h$ ,  $dV = A dx$ ,  $\kappa$ : hệ số điều

chỉnh cho độ vênh của thiết diện ngang, với mặt cắt hình chữ nhật theo tài liệu [2] thì  $\kappa = 5/6$ .

Nội suy các chuyển vị của dầm qua các chuyển vị nút  $\mathbf{d}$ :  
 $u = \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{d}$ ,  $\omega = \mathbf{N}_\omega \cdot \mathbf{d}$ ,  $\theta = \mathbf{N}_\theta \cdot \mathbf{d}$  (6)

đặt vào biểu thức năng lượng (5) thu được

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{d}^T E A \mathbf{N}_{u,x}^T \mathbf{N}_{u,x} \mathbf{d} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{d}^T E I \mathbf{N}_{\theta,x}^T \mathbf{N}_{\theta,x} \mathbf{d} dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L \mathbf{d}^T G A (\mathbf{N}_{\omega,x} - \mathbf{N}_\theta)^T (\mathbf{N}_{\omega,x} - \mathbf{N}_\theta) \mathbf{d} dx \quad (7)$$

Giả sử dầm chịu tác động của tải trọng điều hòa  $F = P \cos \Omega t$  chuyển động với vận tốc  $v$  trên dầm.

Sử dụng nguyên lý năng lượng cực tiểu dẫn đến phương trình cân bằng giữa công của nội lực với công của ngoại lực và lực quán tính trên chuyển dịch khả dĩ động học thu được phương trình phần tử hữu hạn

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = P \cos \Omega t \cdot \mathbf{N}_\omega^T \quad (8)$$

Trong đó,  $\mathbf{M}$  là ma trận khối lượng  
 $\rho$  là mật độ khối lượng.

$$\mathbf{M} = \int_0^L \rho A \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \quad (9)$$

$\mathbf{K}$  là ma trận độ cứng phần tử

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s \quad (10)$$

Với

$$\mathbf{K}_b = \int_0^L E A \mathbf{N}_{u,x}^T \mathbf{N}_{u,x} dx + \int_0^L E I \mathbf{N}_{\theta,x}^T \mathbf{N}_{\theta,x} dx \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_s = \kappa \int_0^L G A (\mathbf{N}_{\omega,x} - \mathbf{N}_\theta)^T (\mathbf{N}_{\omega,x} - \mathbf{N}_\theta) dx$$

$\mathbf{K}_b$ ,  $\mathbf{K}_s$  có thể gọi là ma trận độ cứng uốn, độ cứng trượt tương ứng của phần tử.

Do  $u$ ,  $\omega$ ,  $\theta$  độc lập trong lý thuyết dầm Timoshenko nên về lý thuyết có thể sử dụng hàm dạng nội suy tuyến tính cho các chuyển vị nút này. Tuy nhiên để tránh hiện tượng nghẽn trượt, ngoài ra theo (1) giữa chuyển vị ngang và góc quay vẫn có ảnh hưởng lẫn nhau nên có thể sử dụng hàm dạng tuyến tính cho chuyển vị dọc trục  $u$  và góc quay  $\theta$ , hàm dạng Kosmatka [6] chứa tham số biến dạng trượt  $\phi$  cho chuyển vị ngang  $\omega$ :

$$\begin{pmatrix} u \\ \omega \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_u \\ \mathbf{N}_\omega \\ \mathbf{N}_\theta \end{pmatrix} \mathbf{d} \quad (12)$$

Trong đó

$$\mathbf{d} = (u_1 \quad \omega_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad \omega_2 \quad \theta_2)^T$$

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & N_{\omega_1} & N_{\omega_2} & 0 & N_{\omega_3} & N_{\omega_4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{L-x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix}$$

$$N_{\omega_1} = \frac{1}{1+\phi} (2 \frac{x^3}{L^3} - 3 \frac{x^2}{L^2} - \phi \frac{x}{L} + 1 + \phi),$$

$$N_{\omega_2} = \frac{L}{1+\phi} (\frac{x^3}{L^2} - (2 + \frac{\phi}{2}) \frac{x^2}{L^2} + (1 + \frac{\phi}{2}) \frac{x}{L})$$

$$N_{\omega_3} = -\frac{1}{1+\phi} (2 \frac{x^3}{L^3} - 3 \frac{x^2}{L^2} - \phi \frac{x}{L}), N_{\omega_4} = \frac{L}{1+\phi} (\frac{x^3}{L^3} - (1 - \frac{\phi}{2}) \frac{x^2}{L^2} - \frac{\phi x}{2L})$$

Đặt các hàm dạng trong (12) vào (11) thu được các ma trận độ cứng của phần tử dầm Timoshenko.

$$\mathbf{K}_b = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{L} & 0 & 0 & -\frac{EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI}{L} & 0 & 0 & \frac{EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$K_s = \frac{\kappa GA(\phi^2 + 2\phi + \frac{6}{5})}{1 + \phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{L}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{L}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L}{4} \end{bmatrix},$$

$$\phi = \frac{12EI}{\kappa AGL^2} \quad (13)$$

**3. ỨNG DỤNG VÀ SO SÁNH**

Sử dụng các công thức phần tử bao gồm ma trận độ cứng, ma trận khối lượng, vectơ lực nút đã xây dựng được ở trên để phân tích ứng xử động học cho mô hình dầm Timoshenko chịu tải trọng di động trong đó có so sánh với dầm Bernoulli. Thuật toán số sử dụng trong phần tính này dựa trên phương pháp gia tốc trung bình trong họ các phương pháp Newmark [3] với bước thời gian đảm bảo thuật toán ổn định thỏa mãn  $\Delta t \leq 2/\omega_{max}$ ,  $\omega_{max}$  là tần số riêng lớn nhất. Chương trình tính được viết trên phần mềm Matlab.

Dầm Bernoulli chịu tải trọng di động với 3 chuyển vị nút thì ma trận độ cứng, ma trận khối lượng được kết hợp từ phần tử dầm Bernoulli 2 nút và phần tử thanh được cho dưới dạng [3]:

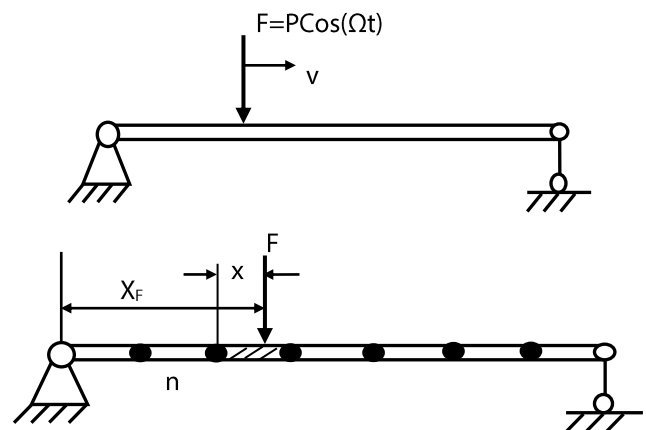
$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$m = \rho AL \begin{bmatrix} 2/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{156}{420} & \frac{22L}{420} & 0 & \frac{54}{420} & -\frac{13L}{420} \\ 0 & \frac{22L}{420} & \frac{4L^2}{420} & 0 & \frac{13L}{420} & -\frac{3L^2}{420} \\ 1/6 & 0 & 0 & 2/6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{54}{420} & \frac{13L}{420} & 0 & \frac{156}{420} & -\frac{22L}{420} \\ 0 & -\frac{13L}{420} & -\frac{3L^2}{420} & 0 & \frac{22L}{420} & \frac{4L^2}{420} \end{bmatrix}$$

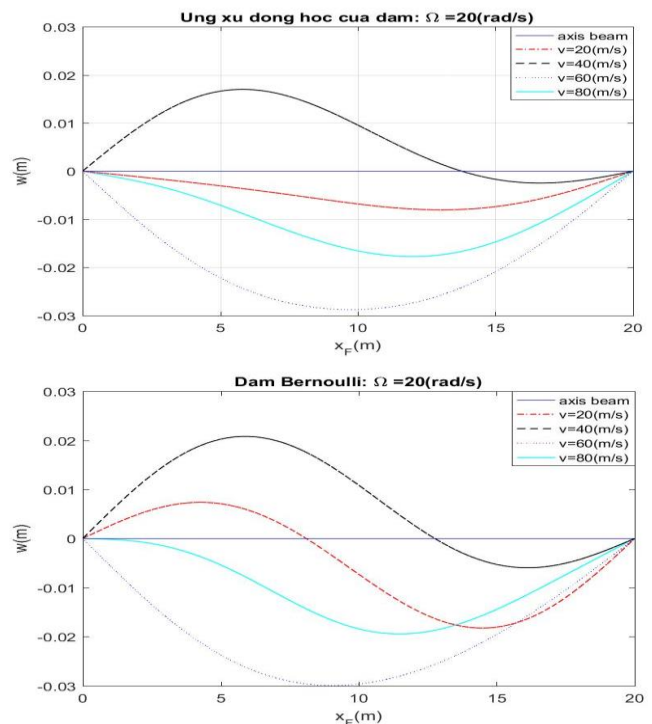
Mô hình dầm Timoshenko chịu tải trọng điều hòa di động với vận tốc v (hình 2):  $F = P \cos(\Omega t)$ . Dầm thép có

chiều dài  $L = 20m$ , mặt cắt ngang  $h = 2b = 0,2m$ ,  $E = 2.10^{11} N/m^2$ ,  $G = 8.10^{10} N/m^2$ ,  $\kappa = 5/6$ ,  $P = 5000N$ .

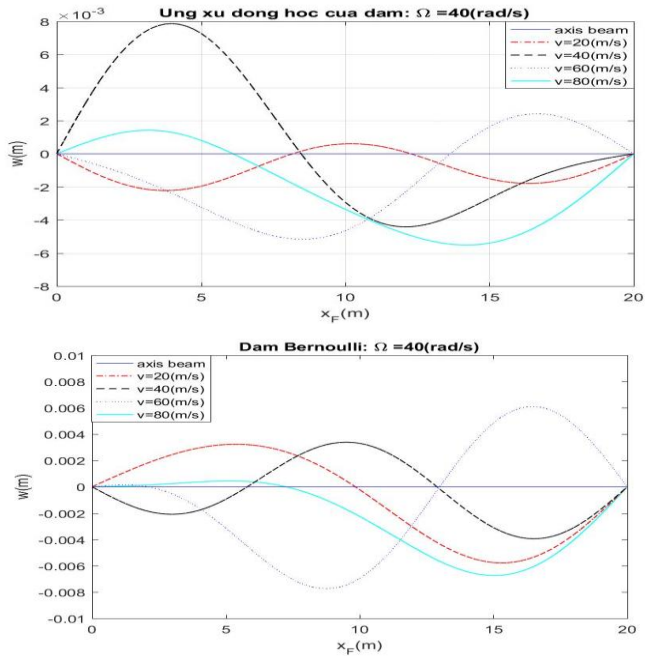
Các kết quả tính toán mô hình dầm Timoshenko và so sánh với dầm Bernoulli được thể hiện trên các hình 3, 4, 5, 6 cho thấy ảnh hưởng của vận tốc tải trọng, tần số lực kích động đến ứng xử động học của dầm. Kết quả so sánh với mô hình dầm Bernoulli khi tần số lực kích động nhỏ thì ứng xử động học của hai mô hình dầm không khác nhau nhiều, tuy nhiên khi tăng tần số lực kích động thì ứng xử động học của hai mô hình khác nhau rõ rệt. Như vậy việc sử dụng mô hình dầm nào tùy thuộc vào từng bài toán cụ thể như bài toán dao động, tải trọng di động có tần số lực kích động nhỏ có thể sử dụng mô hình dầm Bernoulli, khi lực kích động có tần số lớn thì cần phải tính tới biến dạng trượt nên mô hình dầm Timoshenko sẽ phù hợp hơn.



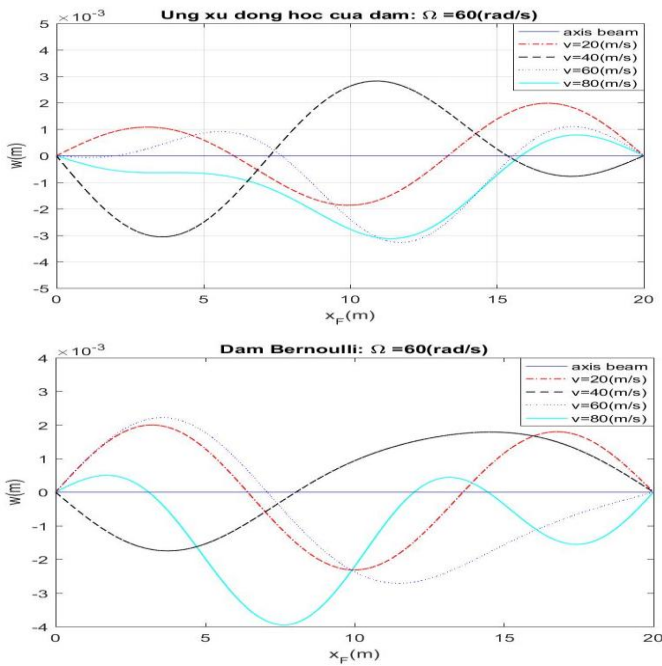
Hình 2. Mô hình dầm chịu tải trọng di động



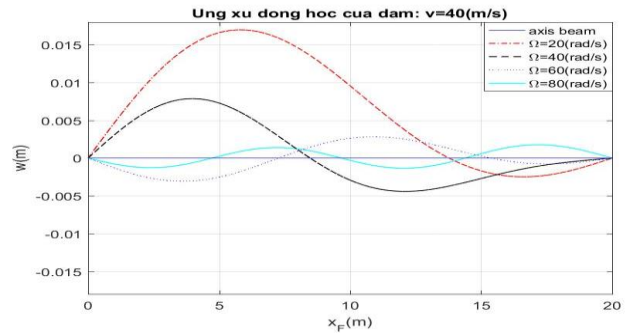
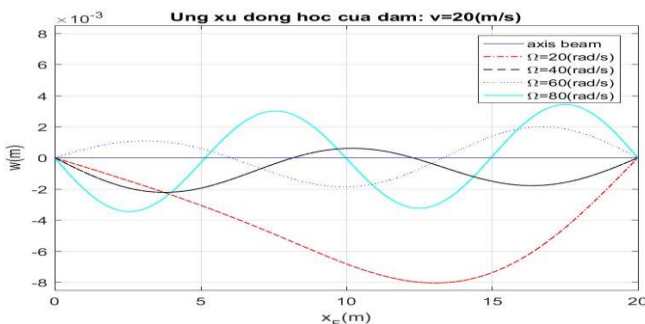
Hình 3. So sánh ứng xử động học dầm Timoshenko và dầm Bernoulli trong trường hợp  $\Omega = 20$  (rad/s)



Hình 4. So sánh ứng xử động học dầm Timoshenko và dầm Bernoulli trong trường hợp  $\Omega = 40$  (rad/s)



Hình 5. So sánh ứng xử động học dầm Timoshenko và dầm Bernoulli trong trường hợp  $\Omega = 60$  (rad/s)



Hình 6. So sánh ứng xử động học dầm Timoshenko khi tần số lực kích động thay đổi

#### 4. KẾT LUẬN

Bài báo đã thiết lập được công thức phần tử hữu hạn cho dầm Timoshenko dưới tác động của tải trọng di động điều hòa. Với cách xây dựng riêng đó là dựa vào đặc điểm của dầm để chọn hàm dạng cho từng loại chuyển vị trong đó có tính tới biến dạng trượt. Xây dựng được chương trình số dựa trên công thức PTHH đã thiết lập được và thuật toán số bằng ngôn ngữ Matlab để phân tích ứng xử động học của dầm chịu tải trọng di động. Các kết quả tính toán cho thấy so với dầm Bernoulli thì ứng xử động học khá giống nhau khi tần số kích động của tải trọng nhỏ và khác nhau rõ rệt khi lực kích động có tần số lớn hơn do ảnh hưởng của biến dạng trượt bên trong. Như vậy, từ các kết quả nhận được đã có thêm một công cụ tính toán số hiệu quả cho dầm và kết quả so sánh có thể giúp ích cho việc lựa chọn mô hình dầm thích hợp với từng bài toán thực tế.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. T.J.R. Hughes, 2000. *The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis*. Dover publication, Inc., Mineola.
- [2]. I.H. Shames and C.L. Dym, 1985. *Energy and finite element methods in structural mechanics*. McGraw-Hill, New York.
- [3]. Daryl L. Logan, 2007. *A first course in the Element Finite Method*, 4<sup>th</sup> Edition, Thomson Canada Limited.
- [4]. Y.W. Kwon and H. Bang, 2000. *Finite element method using Matlab*. CRC Press, New York, 2nd edition.
- [5]. D. C. Pham, 2013. *Essential solid mechanics*. Institute of Mechanics, Hanoi.
- [6]. Kosmatka. J.B., 1995. *An improved two-node finite element for stability and natural frequencies of axial-loaded Timoshenko beams*, Computers and Structures. 57, pp. 141-149.
- [7]. Nguyen Dinh Kien, Tran Thanh Hai (2006). *Dynamic analysis of prestressed Bernoulli beams resting on two-parameter foundation under moving harmonic load*. Vietnam Journal of Mechanics, 28, pp. 176-188.
- [8]. M. S\_im\_sek, T. Kocat\_urk, D. Akba\_s, 2012. *Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load*. Composite Structures, 94, pp. 2358-2364.
- [9]. K. Rajabi, M.H. Kargarnovin, M. Gharini, 2013. *Dynamic analysis of a functionally graded simply supported Euler\_Bernoulli beam subjected to a moving oscillator*. Acta Mechanica, 224, pp. 425-446.