

# ÁP DỤNG CÔNG THỨC VEC TƠ CƯỜNG ĐỘ TỪ TRƯỜNG $H$ ĐỂ LIÊN KẾT CÁC TRƯỜNG CỤC BỘ VỚI MẠCH ĐIỆN NGOÀI BẰNG PHƯƠNG PHÁP BÀI TOÁN NHỎ

APPLICATION OF  $H$ -FORMULATIONS FOR COUPLING OF LOCAL FIELDS AND EXTERNAL CIRCUITS VIA A SUBPROBLEM APPROACH

Đặng Quốc Vương

## TÓM TẮT

Công thức véc tơ cường độ từ trường với mô hình bài toán từ từ tĩnh và từ động được phát triển thông qua phương pháp bài toán nhỏ để liên kết các trường cục bộ với mạch điện ngoài (dòng điện và điện áp). Phương pháp cho phép thực hiện liên kết giữa các trường/đại lượng cục bộ và các đại lượng toàn cục (dòng điện và điện áp) trong các miền nhỏ hữu hạn thông qua phương trình yếu nhận với véc tơ cường độ từ trường  $h$ . Trình tự của phương pháp được thực hiện như sau: chia một bài toán/mô hình hoàn chỉnh bao gồm các trường/đại lượng cục bộ và toàn cục (một trong các miền đó là các vùng mỏng) thành chuỗi các bài toán nhỏ với các miền và đặc tính vật liệu khác nhau. Nghiệm tìm được của bài toán hoàn chỉnh là sự xếp chồng nghiệm của các bài toán nhỏ. Mỗi một bài toán nhỏ được giải trên miền và lưới riêng của nó mà không ảnh hưởng tới miền khác, điều này giúp cho việc chia lưới được dễ dàng hơn và giảm được thời gian tính toán của máy tính.

**Từ khóa:** Phương pháp bài toán nhỏ, phương pháp phần tử hữu hạn, bài toán từ tĩnh, bài toán từ động, liên kết các bài toán, vùng/miền mỏng, từ trường.

## ABSTRACT

A magnetic field conforming formulation ( $h$ -formulation) with magnetostatic and magnetodynamic problems is developed via a subproblem method for coupling of local fields and external circuits (currents and voltages). This method allows performing a natural coupling between local and global fields/quantities (currents and voltages) in finite element domains presented in a magnetic field weak formulation with vector  $h$  of magnetic field intensity. The strategy of the method is to split a complete problem/model composed of local and global fields (some of these being thin regions) into a series of subproblems with different regions materials' characteristics. The obtained solution of a complete problem is a superposition of subproblem solutions. Each subproblem is independently solved on its own domain and mesh without relating to others, which easily facilitates meshing and may decrease computational time of computers.

**Keywords:** Finite element method (FEM), magnetostatics, magnetodynamics, subproblem method (SPM), coupled problems, thin region, magnetic fields.

Viện Điện, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Email: [vuong.dangquoc@hust.edu.vn](mailto:vuong.dangquoc@hust.edu.vn)

Ngày nhận bài: 25/8/2018

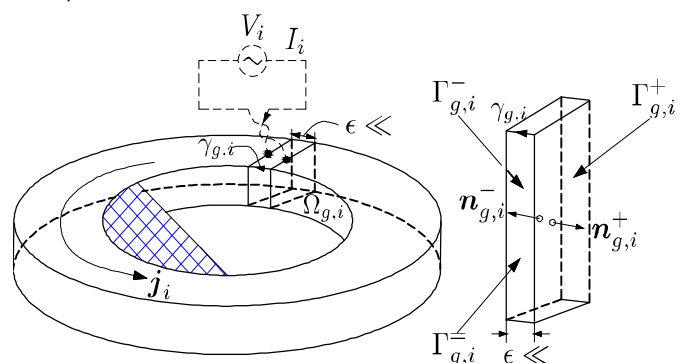
Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 10/10/2018

Ngày chấp nhận đăng: 18/12/2018

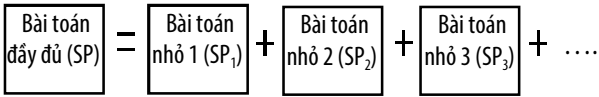
## 1. TỔNG QUAN

Trong những năm gần đây, phương pháp bài toán nhỏ (SPM) đã được một số tác giả phát triển để phân tích, tính toán và mô phỏng các hiện tượng vật lý của các bài toán từ tĩnh và từ động có cấu trúc vỏ mỏng (được mô tả bởi hệ phương trình Maxwell) [2-7]. Tuy nhiên, phương pháp SPM mà các tác giả đã đề xuất chủ yếu tập trung giải bài toán với sự ảnh hưởng của các trường cục bộ "local fields/quantities" với nhau mà không xét đến sự liên kết/kết nối giữa các trường cục bộ với các đại lượng "global fields/quantities" của mạch điện ngoài.

Trong bài báo này, phương pháp SPM được kế thừa và phát triển cho công thức véc tơ cường độ từ trường, không chỉ để liên kết "coupling" các trường/đại lượng cục bộ (hiệu ứng bề mặt, hiệu ứng gân, các trường phản ứng) với nhau mà còn để liên kết giữa các trường cục bộ với mạch điện ngoài (external circuit) là trường/đại lượng toàn cục như dòng điện và điện áp (hình 1). Với cách tiếp cận của phương pháp, các đại lượng toàn cục như dòng điện  $I_i$  và điện áp  $V_i$  của mạch điện ngoài có thể được kết nối với mô hình 2D và 3D của bài toán nghiên cứu thực tế (gồm cuộn dây, miền dẫn, mạch từ, màn chắn điện từ...). Phương pháp SPM được thực hiện theo kịch bản: chia một bài toán lớn (gồm các cuộn dây, mạch từ, miền dẫn, màn chắn điện từ, khe hở và vỏ...) thành chuỗi các bài toán nhỏ như trên hình 2.



Hình 1. Mô hình  $\Omega_{g,i}$  liên kết với các đại lượng toàn cục dòng điện  $I_i$  và điện áp  $V_i$ .



Hình 2. Mô hình chia bài toán đầy đủ thành các bài toán nhỏ

Sau đó, từng bài toán nhỏ được giải trên miền và lưới riêng của nó mà không phụ thuộc vào lưới của miền/bài toán khác. Điều này thuận lợi cho việc chia lưới và có thể làm tăng hiệu quả tính toán. Các bài toán nhỏ được ràng buộc với nhau thông qua các điều kiện tiếp xúc, điều kiện biên, điều kiện bờ mà được thể hiện qua các nguồn mặt (SSs) và các nguồn khối (VSs). Trong đó: các nguồn SSs thể hiện sự thay đổi tại vị trí tiếp xúc của các bài toán nhỏ thông qua các bề mặt, các nguồn VSs thể hiện sự thay đổi các tính chất vật liệu của các miền con (từ miền/vùng dẫn này sang miền/vùng dẫn khác).

**2. PHƯƠNG PHÁP BÀI TOÁN NHỎ**

**2.1. Mô hình bài toán từ động tổng quát**

Xét một bài toán từ động  $SP_i$  với mô hình 2D hoặc 3D mà có nghiệm đầy đủ là tập hợp nghiệm của các bài toán nhỏ tương ứng với các giá trị của  $i = 1, 2, \dots$ . Bài toán xác định trong miền  $\Omega_i$ , với biên  $\partial\Omega_i = \Gamma_i = \Gamma_{h,i} \cup \Gamma_{b,i}$ . Miền nghiên cứu  $\Omega_i$  được xác định  $\Omega_i = \Omega_{c,i} \cup \Omega_{c,i}^C$ . Trong đó  $\Omega_{c,i}$  là vùng dẫn điện/từ và  $\Omega_{c,i}^C$  là vùng không dẫn. Các phương trình, các luật trạng thái, các điều kiện biên và điều kiện bờ của các bài toán nhỏ  $SP_i$  được xác định thông qua hệ phương trình Maxwell như sau [1 - 11]:

$$\text{curl } \mathbf{h}_i = \mathbf{j}_i, \quad \text{div } \mathbf{b}_i = 0, \quad \text{curl } \mathbf{e}_i = -\partial_t \mathbf{b}_i, \quad (1a-b-c)$$

$$\mathbf{b}_i = \mu_i \mathbf{h}_i + \mathbf{b}_{s,i}, \quad \mathbf{e}_i = \sigma_i^{-1} \mathbf{j}_i + \mathbf{e}_{s,i}, \quad (2a-b)$$

trong đó,  $\mathbf{h}_i$  là cường độ từ trường,  $\mathbf{b}_i$  là mật độ từ cảm,  $\mathbf{e}_i$  là cường độ điện trường,  $\mathbf{j}_i$  là mật độ dòng điện,  $\mu_i$  là độ từ thẩm và  $\sigma_i$  là độ dẫn điện. Phương trình (1c) chỉ được xác định trong miền  $\Omega_{c,i}$ , trong khi đó phương trình (1b) được xác định trong miền  $\Omega_{c,i}^C$ .

Các điều kiện biên của bài toán được xác định trên các biên  $\Gamma_{h,i}$  và  $\Gamma_{b,i}$ , đó là:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{e}_i = \mathbf{j}_{f,i}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{b}_i|_{\Gamma_{b,i}} = \mathbf{f}_{f,i}, \quad (3a-b)$$

trong đó  $\mathbf{n}$  là véc tơ đơn vị pháp tuyến hướng ra ngoài của miền  $\Omega_i$ . Các trường  $\mathbf{j}_{f,i}$  và  $\mathbf{f}_{f,i}$  trong (3a) và (3b) là các nguồn mặt SSs được xác định từ nghiệm của các bài toán nhỏ [2 - 7].

**2.2. Dàng buộc giữa các bài toán nhỏ thông qua các nguồn mặt SSs và nguồn khối VSs**

Như đã trình bày trong mục 2.1, các trường  $\mathbf{b}_{s,i}$  và  $\mathbf{e}_{s,i}$  trong (2a) và (2b) là các nguồn khối VSs. Trong đó, nguồn khối  $\mathbf{b}_{s,i}$  được xem như là nguồn từ dư tồn tại trong bài toán nghiên cứu. Nguồn  $\mathbf{e}_{s,i}$  là đại lượng toàn cục được xác định thông qua dòng điện hoặc điện áp từ mạch điện ngoài kết nối với cuộn dây như hình 1. Trong phạm vi của phương pháp SPM, các nguồn khối  $\mathbf{b}_{s,i}$  và  $\mathbf{e}_{s,i}$  mô tả sự thay đổi của đặc tính vật liệu từ miền nghiên cứu của bài toán nhỏ này sang miền nghiên cứu nhỏ của bài toán khác [2 - 7]. Sự thay

đổi của đặc tính vật liệu trong miền nghiên cứu, từ bài toán nhỏ  $SP_u$  ( $i = u$ ) tới bài toán nhỏ  $SP_p$  ( $i = p$ ) được thể hiện thông qua các nguồn khối VSs  $\mathbf{b}_{s,p}$  và  $\mathbf{e}_{s,p}$ , đó là:

$$\mathbf{b}_{s,p} = (\mu_p - \mu_u) \mathbf{h}_u, \quad \mathbf{e}_{s,p} = (\sigma_p^{-1} - \sigma_u^{-1}) \mathbf{j}_u. \quad (4a-b)$$

Mỗi bài toán nhỏ được ràng buộc thông qua các nguồn mặt SSs và các nguồn khối VSs đã được xác định từ nghiệm của các bài toán nhỏ trước đó.

Các trường  $\mathbf{j}_{f,i}$  and  $\mathbf{f}_{f,i}$  trong (3a-b) được xác định như là các nguồn mặt SSs tại vị trí tiếp giáp/xúc giữa biên của các bài toán nhỏ và được thể hiện thông qua sự không liên tục trên biên  $\gamma_i^+$  và  $\gamma_i^-$  ([2 - 7]) khi có sự biến đổi của các trường từ miền này sang miền khác. Đây là trường hợp khi mà các trường của bài toán nhỏ  $SP_u$  được xem như là không liên tục tại biên  $\gamma_i$ . Sự không liên tục này sẽ dẫn đến sai số của nghiệm tìm được từ bài toán nhỏ  $SP_u$ , sai số sau đó được hiệu chỉnh thông qua bài toán nhỏ tiếp theo  $SP_p$ .

Ngoài ra, các điều kiện của các trường toàn cục (dòng điện và điện áp) đặt vào cuộn dây như hình 1 cũng được xem xét. Một cuộn dây điển hình được chỉ ra trong hình 1, nơi mà nguồn sức điện động  $\mathbf{e}$  được đặt vào giữa hai điện cực  $\Omega_{g,i}$  rất gần nhau và được kết hợp với điện áp  $V_i$  và dòng điện  $I_i$  thông qua bề mặt  $\Gamma_{g,i}$ , đó là:

$$\oint_{\Gamma_{g,i}}^{\Gamma_{g,i}^+} \mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} = V_i \quad \text{và} \quad \oint_{\Gamma_{g,i}}^{\Gamma_{g,i}^+} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} ds = I_i, \quad (5a-b)$$

trong đó,  $\gamma_i$  là đường kết nối từ  $\Gamma_{g,i}^-$  đến  $\Gamma_{g,i}^+$  trong miền  $\Omega_{g,i}$ . Bề mặt  $\Gamma_{g,i}$  cũng có thể xem như là một phần của biên  $\Gamma_{e,i}$  của miền nghiên cứu được biểu diễn trong điều kiện biên đối xứng [2 - 7].

**3. PHƯƠNG TRÌNH YẾU NHẬN VỚI CÔNG THỨC VÉC TƠ CƯỜNG ĐỘ TỪ TRƯỜNG**

Xuất phát từ phương trình "Ampere - Faraday" trong (1a-b) và các luật trạng thái (2a-b), phương trình yếu nhận cho véc tơ cường độ từ trường  $\mathbf{h}_i$  của bài toán nhỏ  $SP_i$  ( $i=u, p$  or  $k...$ ) được viết [2 - 7]:

$$\begin{aligned} & \partial_t (\mu_i \mathbf{h}_i, \mathbf{h}'_i)_{\Omega_i} + (\sigma_i^{-1} \text{curl } \mathbf{h}_i, \text{curl } \mathbf{h}'_i)_{\Omega_{c,i}} + \\ & (\sigma_i^{-1} \mathbf{j}_{s,i}, \text{curl } \mathbf{h}'_i)_{\Omega_{c,i}} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{e}_{s,i}, \mathbf{h}'_i \rangle_{\Gamma_{h,i}-\Gamma_{t,i}^+} \\ & \langle [\mathbf{n} \times \mathbf{e}_{s,i}]_{\Gamma_{t,i}}, \mathbf{h}'_i \rangle_{\Gamma_{t,i}} = 0, \forall \mathbf{h}'_i \in F_{h,i}(\Omega_i) \end{aligned} \quad (6)$$

trong đó  $F_{h,i}(\Omega_i)$  là không gian hàm được xác định trong miền nghiên cứu  $\Omega_i$  (bao gồm  $\Omega_{c,i}$  và  $\Omega_{c,i}^C$ ), và bao gồm các hàm nội suy cho trường  $\mathbf{h}_i$  và hàm thử "test function"  $\mathbf{h}'_i$  (tại miền rời rạc, không gian hàm này được xác định thông qua các phần tử hữu hạn cạnh [6]).  $(\cdot, \cdot)_{\Omega_i}$  và  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_i}$  lần lượt là các ký hiệu của tích phân khối được xác định trong miền  $\Omega_i$  và tích phân mặt được xác định trên biên  $\partial\Omega_i = \Gamma_i$  (với  $\Gamma_i = \Gamma_{h,i} \cup \Gamma_{b,i}$ ). Trong đó, tích phân mặt trên biên  $\Gamma_h$  kể đến điều kiện biên (3a), được xác định bằng không.

Mặt khác khi kết nối với mạch điện ngoài, từ phương trình (6), cường độ từ trường  $\mathbf{h}_i$  được xác định thông qua biểu thức [2]:

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{h}_{r,i} + \sum_{j \in \Omega_{g,i}} I_{g,i} \cdot \mathbf{h}_{g,i}, \quad \mathbf{h}'_i \in F_{h,i}(\Omega_i) \quad (7)$$

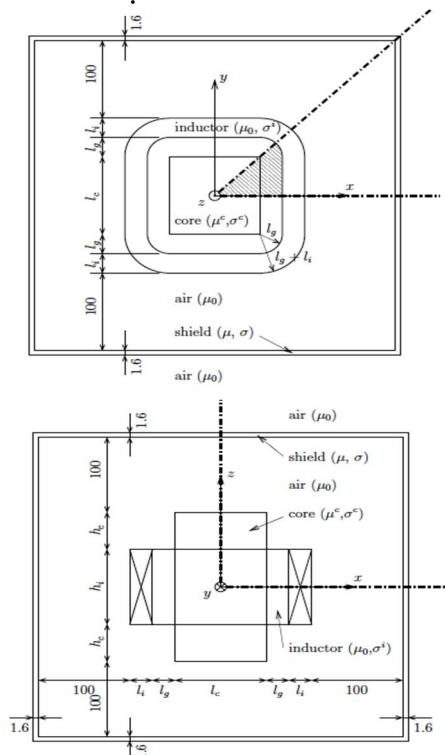
trong đó  $\mathbf{h}_{r,i}$  là trường phản ứng và được xác định [6]. Trong miền  $\Omega_{c,i}^c$ ,  $\text{curl } \mathbf{h}_{r,i} = 0$ , trường  $\mathbf{h}_{r,i}$  được xác định thông qua một điện thế vô hướng  $\phi$ , đó là  $\mathbf{h}_{r,i} = -\text{grad } \phi$ . Dòng điện  $I_{g,i}$  là dòng điện được đặt vào trong cuộn dây hoặc thanh dẫn. Do đó, mật độ dòng điện trong cuộn dây hoặc trong thanh dẫn được xác định thông qua biểu thức  $\mathbf{j}_{s,i} = I_{g,i} \cdot \mathbf{J}_{g,i} = I_{g,i}$  (với  $\mathbf{J}_{g,i}$  là hàm thử, được xác định bằng 1 khi liên kết với mạch điện ngoài và bằng 0 khi không kết nối với mạch điện ngoài).

Thay biểu thức  $\mathbf{j}_{s,i} = I_{g,i}$  và phương trình (7) vào phương trình (6) ta được phương trình yếu nhận kết nối với mạch điện ngoài như sau [6]:

$$\begin{aligned} & \partial_t (\boldsymbol{\mu}_i \mathbf{h}_{r,i}, \mathbf{h}'_i)_{\Omega_i} + \partial_t \left( \mu_i \sum_{j \in \Omega_{g,i}} I_{g,i} \mathbf{h}_{g,i}, \mathbf{h}'_i \right)_{\Omega_i} + \\ & (\boldsymbol{\sigma}_i^{-1} \text{curl } \mathbf{h}_{r,i}, \text{curl } \mathbf{h}'_i)_{\Omega_{c,i}} + \\ & \left( \boldsymbol{\sigma}_i^{-1} \text{curl } \sum_{j \in \Omega_{g,i}} I_{g,i} \mathbf{h}_{g,i}, \text{curl } \mathbf{h}'_i \right)_{\Omega_{c,i}} + \\ & \left( \boldsymbol{\sigma}_i^{-1} I_{g,i}, \text{curl } \mathbf{h}'_i \right)_{\Omega_{c,i}} + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{e}_{s,i}, \mathbf{h}'_i \rangle_{\Gamma_{h,i} - \Gamma_{t,i}} + \\ & \langle [\mathbf{n} \times \mathbf{e}_{s,i}]_{\Gamma_{t,i}}, \mathbf{h}'_i \rangle_{\Gamma_{t,i}} = 0, \forall \mathbf{h}'_i \in F_{h,i}(\Omega_i) \end{aligned} \quad (8)$$

Từ phương trình (8), dễ dàng suy ra phương trình yếu nhận cho các bài toán nhỏ  $SP_i$  ứng với các trường hợp ( $i=u, p$  or  $k...$ ). Các nguồn mặt SSs và nguồn khối VSs để liên kết các bài toán nhỏ được xác định từ các phương trình (3a-b) và các phương trình (4a-b). Tại mô hình rời rạc, nghiệm của bài toán trước sẽ là nguồn mặt SS hoặc nguồn khối VS được ánh xạ cho các bài toán kế tiếp thông qua phương pháp xếp chồng [2, 3].

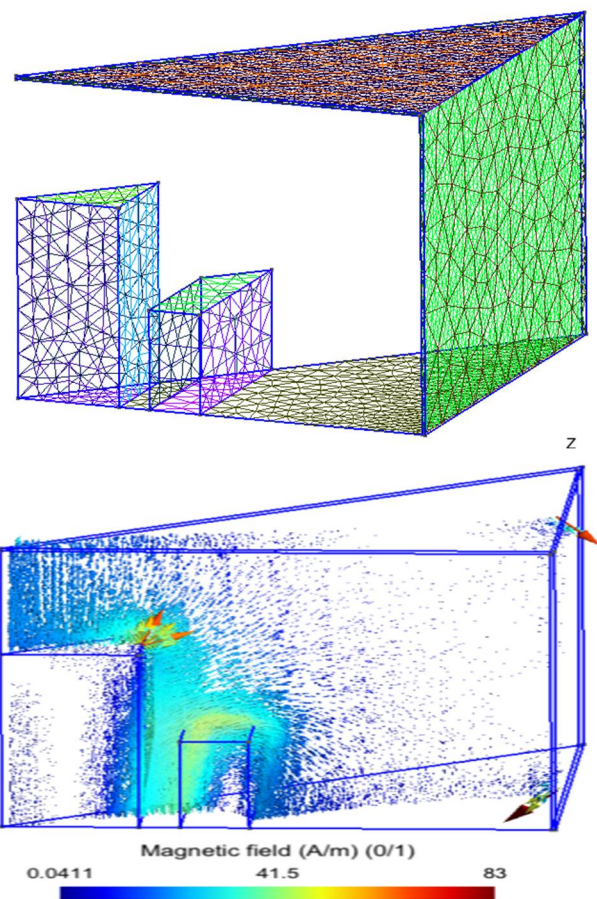
**4. BÀI TOÁN ỨNG DỤNG**



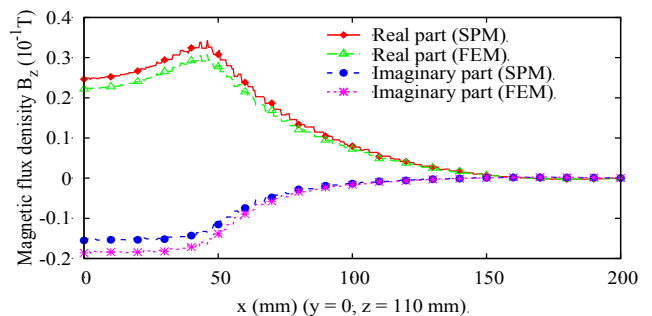
Hình 3. Mô hình cuộn dây - lõi từ - màn chắn từ với các kích thước hình học:  $l_1 = l_2 = 25\text{mm}, h_1 = l_c = 100\text{mm}$  [12]

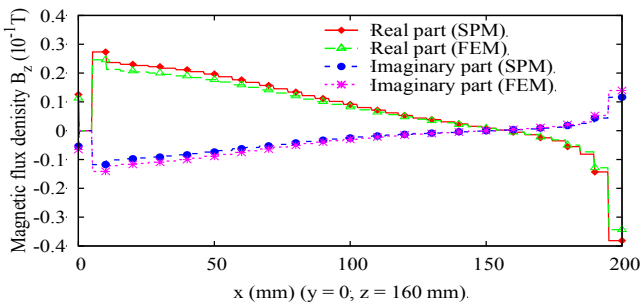
Xét một bài toán như hình 3, bao gồm một lõi từ được bao quanh bởi cuộn dây, bên ngoài được bao bọc bởi một màn chắn điện từ có độ từ thẩm tương đối và độ dẫn điện lần lượt là  $\mu_r = 1000, \sigma = 2.10^6 \text{ S/m}$ . Bài toán đã được tiến hành thực nghiệm bởi nhóm nghiên cứu tại Viện Kỹ thuật điện Nhật Bản [12]. Bài toán được giải với hai trường hợp:

*Trường hợp thứ nhất:* khi kích thích đặt vào cuộn dây (1000 vòng) tương ứng với 0,001A (sức từ động tương ứng là 1A), độ dẫn điện của cuộn dây  $\sigma_{ind} = 1,475.10^7 \text{ S/m}$ . Mô hình lưới 3D (cắt 1/8) của cuộn dây, lõi từ, màn chắn điện từ của bài toán được chỉ ra trong hình 4 (trái). Sự phân bố của từ trường trong lõi từ, màn chắn và xung quanh không khí (ứng với bài toán nhỏ  $SP_p$ ) do dòng điện chạy trong cuộn dây (ứng với bài toán nhỏ  $SP_u$ ) sinh ra được biểu diễn trên “cut-plan” trong hình 4 (phải).



Hình 4. Mô hình lưới 3D (cắt 1/8) (trái) và sự phân bố của từ trường  $\mathbf{h}$  (phải) do dòng điện tạo ra ( $\sigma_{core} = 2.10^6 \text{ S/m}, \mu_r = 1000, f = 50\text{Hz}$ )





Hình 5. Sự phân bố của mật độ từ cảm của phần thực và phần ảo dọc theo màn chắn điện từ {y = 0, z = 110mm (trái), z = 110mm (phải)} (f = 50Hz,  $\sigma_{core} = 2 \cdot 10^6$  S/m,  $\mu_r = 1000$ )

Sự phân bố của mật độ từ cảm của phần thực (real part) và phần ảo (imaginary part) dọc theo màn chắn điện từ tại vị trí y = 0, z = 110mm và z = 160mm được chỉ ra trong hình 5. Nghiệm xấp xỉ chồng của bài toán ( $SP_u + SP_p$ ) đạt được từ phương pháp SPM được so sánh với kết quả đạt được từ phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) [1, 8]. Sai số giữa hai phương pháp nhỏ hơn 10% đối với mật độ từ cảm phần thực và nhỏ hơn 15% đối với mật độ từ cảm phần ảo ứng với hai vị trí khác nhau z = 110mm và z = 160mm. Điều này có sở sở để khẳng định sự phù hợp và tính đúng đắn của phương pháp nghiên cứu.

Trường hợp thứ hai: tương tự như trường hợp thứ nhất, để chứng minh được tính đúng đắn của phương pháp SPM cũng như để có cơ sở so sánh với kết quả thực nghiệm của nhóm tác giả đã công bố kết quả trong [12], cuộn dây được xem như là một "massive inductor" (với độ từ thẩm tương đối của lõi từ  $\mu_r (core) = 1000$ ) và được kết nối với mạch điện ngoài có dòng điện kích thích I = 3000A.

Bảng 1. So sánh kết quả tính toán của mật độ từ cảm B (T) giữa các phương pháp lý thuyết SPM, FEM và phương pháp thực nghiệm [12]

Phương pháp thực hiện	Vị trí {x, y, z} (mm)		
	{0,0,110}	{40,0,110}	{40,40,110}
SPM	0,02491	0,0301	0,03495
FEM	0,02350	0,02850	0,03470
Kết quả đo thực nghiệm [12]	0,02400	0,02981	0,03550

Giá trị tính toán của mật độ từ cảm B (T) tại các vị trí khác nhau {x = 0, y = 0, z = 110mm}, {x = 40, y = 0, z = 110mm} và {x = 40, y = 40, z = 110mm} của phương pháp SPM được so sánh với phương pháp FEM và phương pháp thực nghiệm và được chỉ ra trong bảng 1. Kết quả cho thấy sai số lớn nhất giữa phương pháp SPM và phương pháp FEM nhỏ hơn 5% và giữa phương pháp SPM và phương pháp thực nghiệm [12] nhỏ thực nghiệm nhỏ hơn 2%. Cũng giống như trường hợp thứ nhất, giá trị đạt được của trường hợp thứ 2 giữa các phương pháp lý thuyết và thực nghiệm là khá gần nhau.

### 5. KẾT LUẬN

Phương pháp SPM đã được phát triển để liên kết "coupling" các trường cục bộ "local fields" với các trường toàn cục "global fields" của mạch điện ngoài. Thông qua bài toán thực tế [12], kết quả đạt được từ phương pháp SPM đã được so sánh và kiểm chứng với kết quả đạt được từ phương

pháp FEM và đặc biệt là đã được so sánh với kết quả thực nghiệm [12]. Phương pháp SPM cũng đã chỉ ra được sự ảnh hưởng và thay đổi của từ trường đối với môi trường xung quanh khi kể đến màn chắn điện từ. Điều này sẽ giúp ích cho các nhà nghiên cứu/sản xuất trong việc lắp đặt và chế tạo các màn chắn điện từ để hạn chế tối đa sự ảnh hưởng của từ trường đối với khu vực/các thiết bị điện/điện tử xung quanh. Bài báo được thực hiện dựa trên hai phần mềm mã nguồn mở Gmsh (<https://geuz.org/svn/gmsh/>) và GetDP (<http://geuz.org/getdp/>) được viết bởi hai giáo sư Patrick Dular và Christophe Geuzaine, Đại học Liege, Vương Quốc Bỉ. Source code của phương pháp SPM đã TS. Đặng Quốc Vương và giáo sư Patrick Dular phát triển từ năm 2009 như đã thể hiện trong một số tài liệu tham khảo.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Tran Thanh Tuyen and Dang Quoc Vuong, 2017. "Using a Magnetic Vector Potential Formulation for Calculating Eddy Currents in Iron Cores of Transformer by A Finite Element Method". The University of Da Nang Journal of Science and Technology, no 3 (112) (Part I).
- [2]. Vuong Q. Dang, P. Dular R.V. Sabariego, L. Krähenbühl, C. Geuzaine, 2013. "Subproblem Approach for Modeling Multiply Connected Thin Regions with an h-Conformal Magnetodynamic Finite Element Formulation". in EPJ AP., vol. 63, no.1.
- [3]. Vuong Q. Dang, P. Dular, R.V. Sabariego, L. Krähenbühl, C. Geuzaine, 2012. "Subproblem approach for Thin Shell Dual Finite Element Formulations". IEEE Trans. Magn., vol. 48, no. 2, pp. 407–410.
- [4]. P. Dular, Vuong Q. Dang, R. V. Sabariego, L. Krähenbühl and C. Geuzaine, "Correction of thin shell finite element magnetic models via a subproblem method," IEEE Trans. Magn., Vol. 47, no. 5, pp. 158–1161, 2011.
- [5]. Dang Quoc Vuong, 2016. "A Subproblem Method for Accurate Thin Shell Models between Conducting and Non-Conducting Regions". The University of Da Nang Journal of Science and Technology, no 12 (109).
- [6]. Tran Thanh Tuyen, Dang Quoc Vuong, Bui Duc Hung and Nguyen The Vinh, 2016. "Computation of magnetic fields in thin shield magnetic models via the Finite Element Method". The University of Da Nang Journal of Science and Technology, no 7 (104).
- [7]. Dang Quoc Vuong, 2013. "Modeling of Electromagnetic Systems by Coupling of Subproblems - Application to Thin Shell Finite Element Magnetic Models,". PhD. Thesis (2013/06/21), University of Liege, Belgium, Faculty of Applied Sciences.
- [8]. Dang Quoc Vuong, Bui Duc Hung and Khuong Van Hai, 2016. "Using Dual Formulations for Correction of Thin Shell Magnetic Models by a Finite Element Subproblem Method". The University of Da Nang Journal of Science and Technology, no 6 (103).
- [9]. Dang Quoc Vuong, 2016. "Tính toán sự phân bố của từ trường bằng phương pháp miền nhỏ hữu hạn - Ứng dụng cho mô hình cấu trúc vỏ mỏng". Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Đại học Công nghiệp Hà Nội, số 36, trang 18-21, 10/2016.
- [10]. Dang Quoc Vuong, 2017. "An iterative subproblem method for thin shell finite element magnetic models". The University of Da Nang Journal of Science and Technology, no 12 (121).
- [11]. S. Koruglu, P. Sergeant, R.V. Sabariego, Vuong. Q. Dang, M. De Wulf, 2011. "Influence of contact resistance on shielding efficiency of shielding gutters for high-voltage cables". IET Electric Power Applications, Vol.5, No.9, pp. 715-720.
- [12]. T. Nakata, N. Takahshi, K.Fujiwara, and T.Imai, 1990. "Effects of permeability of magnetic materials on errors of the T-Ω method". IEEE Trans. Magn., vol. 26, no. 2, pp. 698–701.